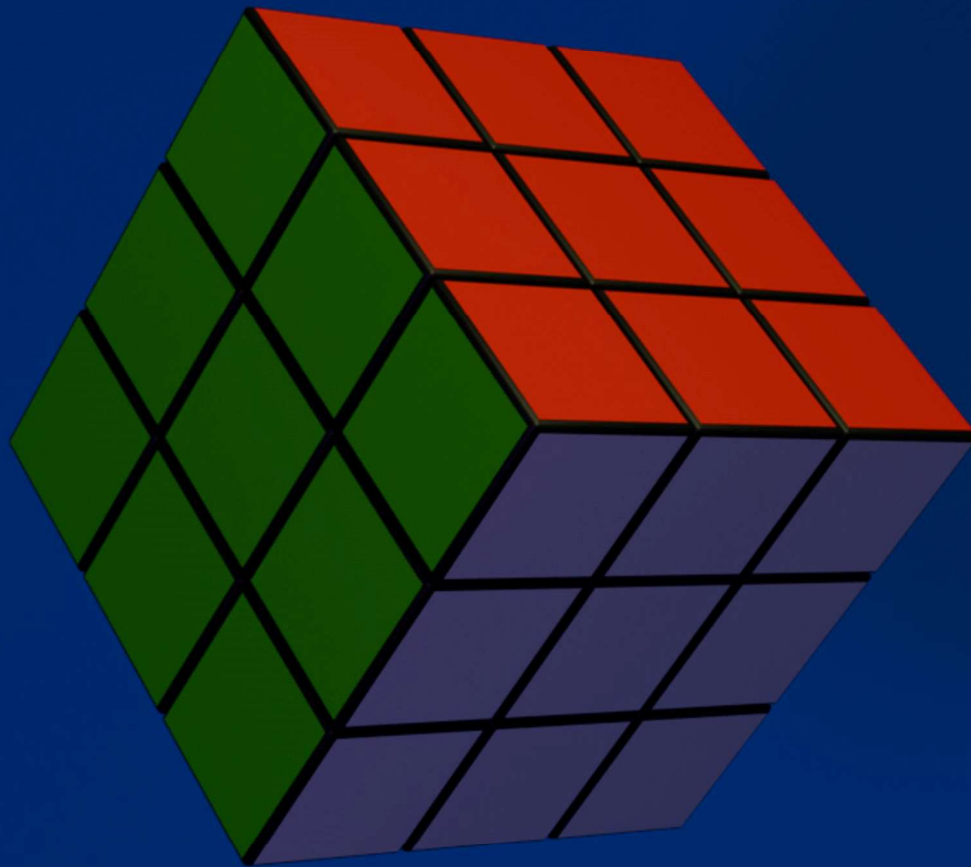


Medios para la enseñanza y el desarrollo del pensamiento matemático en la educación obligatoria y nivel superior



Coordinadores:
Liliana Aurora Tabares Sánchez
Saúl Elizarraras Baena
Armando Mata Romero

**MEDIOS PARA LA ENSEÑANZA Y EL DESARROLLO
DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN
OBLIGATORIA Y NIVEL SUPERIOR**

Liliana Aurora Tabares Sánchez
Facultad de Ciencias Exactas UJED

Saúl Elizarraras Baena
Escuela Normal Superior de México

Armando Mata Romero
Facultad de Ciencias Exactas

Primera edición: Mayo 30 2025

Editado: en México

ISBN: 978-970-96620-0-9

Editor:

Red Durango de investigadores Educativos A.C.

Correctora de Estilo:

Diseño de Portada:

Liliana Sarahí González Tabares

Comité Editorial:

José Cirilo Castañeda

Delfín Ana Rosa Rodríguez López

Nancy Elizabeth Harvin Romero

Sara Rodríguez Duran

Leticia Pesqueira Leal

Mayela Quiñones López

María de Lourdes Melchor Ojeda

Este libro no puede ser impreso, ni reproducido total
o parcialmente por ningún otro medio
sin la autorización por escrito de los editores.

AUTORES

Lorena Trejo Guerrero

Eduardo Basurto Hidalgo

Maricela Bonilla González

Orlando Vázquez Pérez

Saúl Elizarraras Baena

Liliana Aurora Tabares Sánchez

José Luis Medardo Quiroz Gleason

Ana María Ojeda Salazar

Contenido

Resumen	v
Prólogo	vi
CAPITULO I	1
La enseñanza de la adición y la multiplicación en la escuela primaria multigrado	1
Lorena Trejo Guerrero	1
CAPITULO II	11
Aproximación a objetos matemáticos vía el uso de tecnología digital.....	11
Eduardo Basurto Hidalgo	11
CAPÍTULO III	24
La tecnología en las mallas curriculares de la formación de maestros de matemáticas	24
Maricela Bonilla González¹	24
Orlando Vázquez Pérez¹	24
Saúl Elizarraras Baena¹	24
José Luis Medardo Quiroz Gleason¹	24
CAPITULO IV	40
Rol del Cas y del papel-y-lápiz en la comprensión del concepto de integral impropia	40
Liliana Aurora Tabares Sánchez	40
CAPITULO V	52
Enseñanza y comprensión de estocásticos con estudiantes de bachillerato desde el enfoque de la interdisciplinariedad	52
Saúl Elizarraras Baena	52
Ana María Ojeda Salazar	52

Resumen

Se presenta una serie de investigaciones que tienen como objetivo común analizar medios para la enseñanza de conceptos matemáticos al buscar una mejor comprensión a fin de desarrollar el pensamiento matemático en los distintos momentos de la vida estudiantil. A la vista de distintos marcos teóricos y conceptuales se analizan las formas de conocimiento de conceptos básicos como la multiplicación y la suma hasta aquellos que resultan mucho más abstractos como los de integrales impropias o estocásticos.

El libro se divide en cinco capítulos: El primero exhibe la investigación que se realizó en una escuela multigrado que toma como base la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1999) para exponer cómo los estudiantes encuentran sentido a las operaciones matemáticas.

El segundo presenta una investigación en la que se incorpora la tecnología digital y se analiza desde la génesis instrumental como la describe Artigue (2002).

En el tercer capítulo muestra resultados de una investigación documental en la cual se revisaron las mallas curriculares de diferentes planes de estudio para la formación de profesores para identificar cómo está presente el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el capítulo cuatro la investigación destaca la influencia del CAS (Computer Algebra System; de la Voyage 200) como parte de la Técnica en la comprensión del concepto de integral impropia.

Por último, en el capítulo cinco propone la caracterización de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en estudiantes de bachillerato al realizar un proyecto interdisciplinario.

Prólogo

El pensamiento matemático es una de las habilidades más importantes que los estudiantes deben de desarrollar a lo largo de su formación académica, no solo por su importancia en la resolución de problemas científicos y tecnológicos, sino por su capacidad de promover el razonamiento lógico, el desarrollo cognitivo y la competencia en la toma de decisiones. En este contexto, el docente de matemáticas está en constante búsqueda del desarrollo del pensamiento matemático en sus alumnos, de lograr una comprensión profunda y significativa de los temas que se estudian en el salón de clases y de la lógica detrás de ellos, evitando la mecanización de procedimientos y la implementación de actividades rutinarias o algorítmicas.

A lo largo de este libro se analizan diversos enfoques didácticos como parte de la línea de investigación de matemática educativa. Se profundiza en la comprensión que aportan tanto los enfoques tradicionales como los mediados por la tecnología y se explora cómo se fomenta tanto el pensamiento como la formación de habilidades matemáticas en estudiantes desde nivel básico hasta superior, al buscar llevar a la reflexión y provocando que los conceptos estudiados sean más accesibles e interesantes para los estudiantes.

Las tecnologías digitales toman un papel cada vez más preponderante en todas las actividades de nuestra vida, y por supuesto las actividades didácticas de enseñanza de las matemáticas no son la excepción. Mientras que los estudiantes de todos los niveles son auténticos nativos digitales, aún existe cierta resistencia de parte de algunos docentes a incorporar plenamente las tecnologías en su práctica docente. Este texto invita al lector a reflexionar sobre la manera en la que los medios digitales pueden ser seleccionados y aplicados de manera efectiva, considerando las necesidades de los estudiantes, siendo este un enfoque crucial para la educación dentro de la sociedad actual del conocimiento, que requiere individuos capaces de enfrentar los desafíos presentes y futuros.

CAPITULO I

La enseñanza de la adición y la multiplicación en la escuela primaria multigrado

Lorena Trejo Guerrero

Universidad Pedagógica Nacional Unidad 131 - Hidalgo, México

Resumen

El presente trabajo muestra los resultados obtenidos al aplicar una situación de enseñanza de la suma y su relación con la multiplicación. La investigación se realizó en un grupo de 1º, 2º y 3º grados de una escuela primaria pública multigrado, en el Estado de Hidalgo, México, bajo el enfoque de la Investigación–Acción por lo tanto, quien escribe el presente escrito es quien implementó las actividades que aquí se reportan. El estudio tuvo la finalidad de conducir a los alumnos a reflexionar respecto a las relaciones entre la adición y la multiplicación. Nuestros resultados nos permitieron favorecer la reflexión sobre los beneficios de reconocer la representación visual bien organizada de la información en el pizarrón, para lo cual utilizamos los cambios de representación semiótica y planteados por Duval y su representación formal con la finalidad de que las operaciones cobren sentido matemático, además de favorecer la interpretación para los tres grados y reconocer los logros particulares de cada grupo de alumnos.

Palabras Claves: adición, multiplicación, representación, primaria multigrado.

Introducción

En la educación matemática, se trabaja con ideas, símbolos y representaciones abstractas, existe también la posibilidad de realizar representaciones semióticas que faciliten el aprendizaje. Es importante que los alumnos reconozcan a los registros de representación como una herramienta disponible que les permita acceder de conocimientos sencillos, como la suma iterada y la duplicación de cantidades para comprender paulatinamente la economía de la multiplicación con números naturales. Nuestras preguntas de investigación son: ¿Qué importancia tiene la representación en la construcción de conceptos matemáticos? y ¿Cómo representan los profesores la información para explicar el proceso de resolución?

Marco Conceptual

Perkins (1981, p. 145), nos dice que “un conocimiento general incluye estrategias ampliamente aplicables para resolver problemas, tomar decisiones, desarrollar un pensamiento inventivo y para regular o monitorear el proceso de solución de problemas. Mientras que un conocimiento específico incluye aspectos particulares de cada disciplina”.

Tomamos a Duval (1999), quién menciona que se recurre a varios registros semióticos de representación, algunos de los cuales han sido desarrollados específicamente para efectuar tratamientos matemáticos (el álgebra, sistema de numeración posicional, etc.).

También consideramos los problemas de estructura aditiva: el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, su esquema básico es de la forma $a + b = c$ (Vergnaud, 1991). Los problemas de estructura multiplicativa: son aquellas situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple y múltiple, para los cuales usualmente se necesita multiplicar o dividir (Vergnaud, 1991).

La enseñanza de la multiplicación

Las primeras situaciones multiplicativas están vinculadas a la idea de cierta unidad repetida un número conocido de veces. Se forman grupos de igual cantidad y se determina un total a partir del número de grupos. Si el niño de primer grado de primaria tiene en mente la idea de grupo, es capaz de imaginar la repetición de los grupos, es cuando cobra sentido el término “veces”. Cuando un niño siente que es fácil agrupar, nota la conveniencia de conocer productos y siente la necesidad de aprender las tablas con fluidez. La multiplicación se usa para simplificar la expresión de sumar el mismo número una y otra vez (Isoda y Olfos, 2009).

La escuela multigrado

Nuestra propuesta ayuda a crear contextos socialmente más justos para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y esto es posible debido a que en las escuelas multigrado los alumnos aprenden unos de otros, la ayuda mutua y las tareas compartidas entre pares y con sus compañeros de otros grados, permiten a los niños más chicos adquirir conocimientos de los alumnos mayores, quienes a su

vez adquieren seguridad en sí mismos y reafirman sus conocimientos al interactuar con sus compañeros de grados inferiores (Trejo y Valdemoros, 2015).

Block, S. D. y Resendiz, L. (2015) mencionan la importancia de las ayudas personalizadas y sus posibilidades, nosotros pretendemos aprovechar esa ayuda mutua entre nuestros estudiantes de los tres grados para construir el significado de la multiplicación, mediante la suma de cantidades representadas adecuadamente.

Por las condiciones de las escuelas multigrado, donde el número de alumnos se presta para el desafío de crear una comunidad para el aprendizaje (Sato, 2018) en donde los alumnos una vez establecida una relación personal directa de cada uno con la maestra, se pueda trabajar en las posibilidades de mejora en sus aprendizajes. Necesitamos saber qué hacen los profesores para lograr los objetivos que se plantean a través de la planeación de las clases y el uso de los recursos didácticos.

La investigación-acción

La reflexión desde la práctica implica la condición de un docente investigador, para Restrepo (2004), el docente va elaborando un saber pedagógico apropiado y la investigación acción facilita su construcción. Para Carr y Kemmis (1988) la Investigación-Acción es una forma de indagación autónoma y reflexiva, realizada por quienes participan en las situaciones sociales, para mejorar la racionalidad y la justicia de las propias prácticas sociales o educativas; la comprensión sobre las mismas; y las situaciones e instituciones en que estas prácticas se realizan. Schön (1998), plantea que la práctica docente se caracteriza por la complejidad, la incertidumbre, la inestabilidad y la singularidad, e insiste en que el docente, a través de la reflexión acción construya su saber pedagógico, critique su práctica y la transforme, haciéndola más pertinente a las necesidades del medio. Elliot (2000), supone entender la enseñanza como un proceso de investigación, integra la reflexión y el trabajo intelectual en el análisis de las experiencias que se realizan.

La reflexión de la práctica requiere un análisis cuidadoso de los recursos didácticos que se utilicen, nos enfocamos en la organización visual de la información y el uso efectivo del pizarrón (Makoto y Fernández, 2012). Es importante que los

profesores tengan presente que para resolver un problema la organización visual de la información es indispensable, puede haber situaciones problemáticas que necesiten una explicación verbal solamente, pero otras requerirán del uso de materiales visuales, de ahí que la eficiente organización visual de la información es un punto importante para el logro de los objetivos de la lección (Isoda, Olfos, 2009). Esa información visual no siempre se refiere a símbolos convencionales, también puede referirse a símbolos semióticos (bolitas).

El uso efectivo del pizarrón en la era de la integración de la tecnología en el aula, se puede pensar que es una antigua herramienta de instrucción que no tiene ningún impacto en el aprendizaje de los estudiantes (Isoda y Katagiri, 2012). El uso innovador del pizarrón, tiene un efecto profundo en el pensamiento y la comprensión de los alumnos en el aula, proporciona oportunidades para los maestros de explorar nuevas y efectivas maneras de utilizarlo. Entre los beneficios del uso adecuado del pizarrón se fomenta la organización de la lección y presenta la información como un modelo para que los estudiantes puedan tomar notas durante la clase (Makoto, Fernández, 2004).

Método

El estudio se llevó a cabo en una escuela primaria multigrado del sistema público en el Estado de Hidalgo, con 4 alumnos de 1°, 4 alumnos de 2° y 7 alumnos de 3^{er} grados de primaria, sus edades oscilan entre 6 y 8 años de edad. Los instrumentos metodológicos como el registro de observación en el diario del profesor, permitieron sistematizar la información recopilada durante el trabajo de campo.

Diseñamos una propuesta didáctica con las operaciones aritméticas básicas: suma y multiplicación con números naturales. Partimos de los antecedentes curriculares a los que dimos seguimiento, trabajamos estos contenidos desde el inicio del ciclo escolar y antes de implementar nuestra propuesta:

1er grado: identificar colecciones con la misma cantidad de objetos

2° grado: distinguir regularidades en secuencias numéricas de 2 en 2, de 3 en 3, 4 en 4, 5 en cinco [...] hasta 9 en 9.

3^{er} grado: introducción al uso de la tabla pitagórica. Problemas multiplicativos tales como identificar llantas necesarias para armar un coche (4) y para 2 coches (8) en estos problemas los alumnos identificaron que se duplica el número de llantas de acuerdo al número de coches.

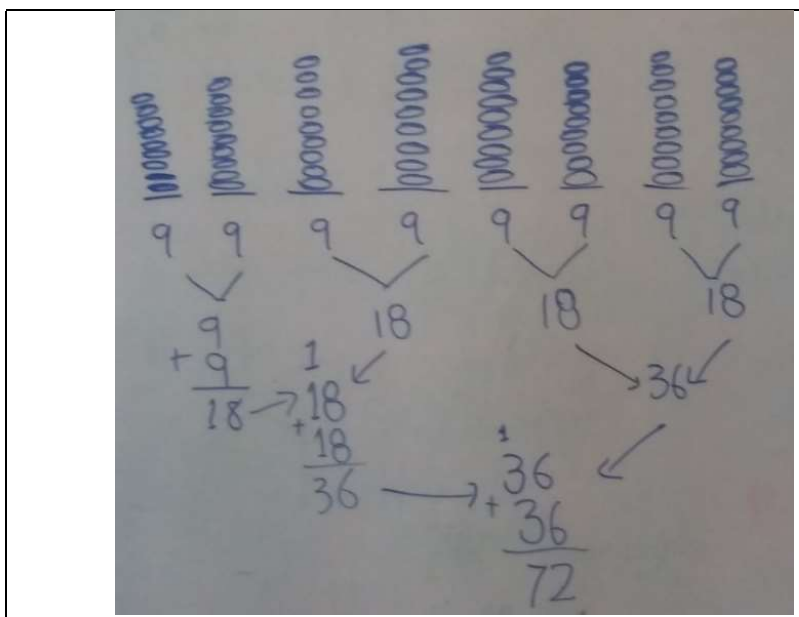
Preparamos a los alumnos desde el inicio del curso escolar hasta la segunda mitad del mismo para implementar nuestra propuesta, nos interesa revisar la representación bien organizada de la información y revalorar el uso del pizarrón y el impacto de ambos en el aprendizaje.

La secuencia didáctica

- a) Dibujar en el pizarrón 8 grupos de 9 bolitas cada uno
- b) Se escribe el total debajo de cada grupo (en este caso 9)
- c) Se relacionan 2 grupos de 9 bolitas cada uno y se indica la suma $9+9=18$.
- d) Se indica con flechas la suma de $18+18=36$.
- e) Finalmente se indica con flechas la suma de $36+36=72$.
- f) Se pretende no rebasar cantidades mayores al 90 que es el resultado de multiplicar 9×10 , o 10×9 .

La intención didáctica de la enseñanza de la multiplicación, va en relación con la suma iterada y la duplicación de cantidades, lo cual permite reconocer que esa cantidad duplicada cabe determinado número de veces en la tabla de multiplicar, para acercar a los estudiantes a reconocer la economía de la multiplicación. ¿Qué queremos decir? Que los estudiantes de 3er grado pueden seguir el patrón de duplicación y advertir que los resultados son múltiplos de 9, mientras los de 2° grado se aproximan a esto de manera más sencilla. Ver Figura 1.

Figura 1. Organización visual de la información y uso efectivo del pizarrón.



Resultados de los alumnos:

a) Los niños de primero pudieron reconocer las cantidades representadas en el pizarrón, las relaciones que se establecieron al identificar el mismo número de bolitas por cada numeral, así como juntarlas en un nuevo agrupamiento (18), lo cual les permitirá construir secuencias numéricas de 9 en 9, acudiendo al conteo con los dedos si fuera necesario, lo cual facilita la tarea. Otra opción para construir la secuencia numérica ascendente es contar las bolitas dibujadas en el pizarrón (9), o bien dibujarlas en el cuaderno y construir su secuencia numérica, el conteo de la misma cantidad de bolitas en convivencia con sus compañeros de otros grados en el grupo multigrado permitió a la maestra introducir a los niños de 1er grado la noción de multiplicación.

b) Los niños de segundo grado, con el ejemplo del conteo de 9 bolitas, al igual que sus compañeros de primer grado, contar las bolitas ordenadas adecuadamente les permitió la construcción de secuencias numéricas ascendentes, con habilidades para imaginar el mismo procedimiento con otras cantidades al reconocer que representan un determinado número de veces la misma cantidad, puede ser 3, 6 u otra, siempre y cuando sea de un dígito, para acudir a sus dedos

si es necesario, dibujar ordenadamente las bolitas es necesario para realizar el conteo de manera adecuada. También pueden duplicar pequeñas cantidades que no excedan cinco dedos para que, con el recurso de sus 5 dedos de cada mano, puedan percibir que las cantidades se duplican.

c) Los alumnos de tercer grado encontraron una nueva manera de interpretar la multiplicación al relacionar las representaciones de nueve “bolitas” de manera reiterada con las duplicaciones, primero del 9, luego el 18 y finalmente el 36, los alumnos descubrieron los resultados de la tabla de multiplicar del 9 debido a que las duplicaciones le dan sentido a la tabla, lo cual rompe con la memorización mecánica de las tablas de multiplicar, además promueve la generalización cuando siguen sumando reiteradamente el 9 más allá del $9 \times 10 = 90$, descubren que las secuencias numéricas ascendentes de 9 en 9 se obtienen con duplicaciones y se atreven a manejar cantidades más grandes, lo cual propicia también la necesidad de dividir para comprobar si su resultado es correcto.

Análisis de resultados

Con las representaciones semióticas realizadas por la profesora en el pizarrón fue posible comprender las propiedades de la suma y su relación con la multiplicación y las cantidades que se duplican, esto debido a la organización visual de la información y la revaloración del uso amplio del pizarrón como recursos didácticos, en la investigación de la educación matemática necesitamos saber qué hacen los profesores con los recursos cotidianos, para lograr los objetivos que se plantean a través de la planeación de las clases y mejorar el uso de los recursos didácticos como el pizarrón, lo que nos permitió comprender las maneras de recrear el uso de signos semióticos y signos formales de la matemática escolar por parte de los profesores y su impacto en el aprendizaje de los estudiantes, exploramos la importancia que le dan a la representación y la organización adecuada de la información para lograr que sus estudiantes logren aprendizajes significativos.

Por lo anterior, proponemos abrir espacios de reflexión en donde los profesores se involucren en el desafío de crear una comunidad para el aprendizaje,

(Sato, 2018), donde la tarea que propone llegue a diferentes niveles de conocimiento según las necesidades de sus alumnos, para el maestro de escuela multigrado es casi obligada esta modalidad de trabajo, lo importante aquí es que no se pierda la importancia de reflexionar sobre sus acciones didácticas al momento de diseñar una tarea.

Para trabajar en las posibilidades de mejora de la práctica diaria, la investigación acción permite a los docentes desarrollar ésta capacidad de análisis sobre sus acciones, al identificar una problemática y atenderla; para ello, es necesario seguir un proceso riguroso, sistemático, analítico y crítico, en donde el aula se convierte en un verdadero espacio experimental. Intentar una y otra vez diversificar las tareas desde la didáctica posibilita reinventarlas y renovarlas, para lo cual es necesario identificar las dificultades que enfrentan sus alumnos al abordar determinados contenidos y además atender a tres grados diferentes en el mismo grupo.

Conclusiones

Consideramos que la revisión cuidadosa de los antecedentes curriculares de cada grado, es decir, los conocimientos que se abordaron desde el inicio del curso escolar, nos permitieron implementar la propuesta didáctica en el momento pertinente, en otro momento del ciclo escolar, los niños de primer grado, no estarían en condiciones de integrarse con sus compañeros de segundo y tercer grados, esto es un privilegio, debido a que la mirada y la experiencia docente en escuelas multigrado, permite a los profesores de estas escuelas observar cómo los niños avanzan de manera natural desde la suma iterada, hasta llegar a comprender la economía de la multiplicación.

Las actividades implementadas en las sesiones con los niños, permitieron un trabajo acorde con los avances y ritmos de aprendizaje de ellos, lo que es un principio básico del trabajo en multigrado. Reconocer los conocimientos en los que los niños de primer grado se inician, los de segundo grado transitan de manera adecuada y los de tercer grado los consolidan, en una tarea pensada para los tres grados, es necesario interpretar para comprender los desafíos a los que se

enfrentan los profesores que atienden a tres grados. Es necesario reconocer las limitaciones de los alumnos de cada grado, sólo de esta manera se podrán diseñar actividades adecuadas que les permitan, avanzar o consolidar un conocimiento matemático.

Con la representación en el pizarrón al agrupar dos cantidades iguales que implican la suma de una cantidad fija ($9+9+9$) fue posible introducir un nuevo uso de la información a partir de identificar la duplicación de cantidades, luego entonces, de duplicar la primera cantidad y así sucesivamente hasta que los alumnos reconocieron, con la influencia directa del profesor que multiplicar resulta más económico que sumar o duplicar reiteradamente una cantidad. Que se puede duplicar cualquier cantidad y que pueden contar con el uso de la representación de las cantidades. Es importante dejar a la vista de los alumnos la información visual que les permitirá reconectar cuando lo requieran, habituarlos a organizar de manera adecuada la información, repitiendo el conteo de cada grupo de “bolitas” que se van dibujando en el pizarrón, para después reagruparlas con las duplicaciones.

Ante el futuro de la matemática educativa en tiempos inciertos y cambios tan acelerados, es necesario formarse en la reflexión permanente de la práctica propia, con la finalidad de renovar conocimientos, habilidades y realizar acciones pensadas desde la reflexión crítica y analítica de forma sistemática que permita percibir los cambios y sus resultados acordes a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

- Block, S. D. y Resendiz, L. (2015) Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado: Un estudio de caso. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. RMIE, 2015, VOL. 20, NÚM. 66, PP. 711-735.
- Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Peter Lang Ediciones – Universidad del Valle.
- Elliot, Jhon (2000). *La investigación acción en la educación*. Madrid, España: Ediciones Morata.
- Isoda, M. y Olfos R. (2009). *El estudio de clases y las demandas curriculares. La Enseñanza de la Multiplicación*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Isoda, M., Katagiri, S. (2012). *Mathematical Thinking: How to develop it in the Classroom*. World Scientific: Singapore.

- Makoto, Y., Fernández, C. (2004). *A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. New Jersey, USA. Research for better schools editions.
- Perkins, D. N. (1981). Las obras de la mente. *Mind's Best Work*. Harvard University Press, Cambridge.
- Restrepo, G., B. (2004) La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico Educación y Educadores, núm. 7. Pp. 45-55 Universidad de La Sabana Cundinamarca, Colombia.
- Sató, M. (2018). El desafío de la escuela: crear una comunidad para el aprendizaje. Traducción de Virginia Meza H. México. El Colegio de México.
- Schön, D. (1998). El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan. Barcelona: Paidós.
- Trejo, L., & Valdemoros, M. (2015). *El uso del lenguaje matemático en la enseñanza del número natural en la escuela primaria* [Tesis doctoral no publicada]. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV – IPN).
- Vergnaud, G. (2000). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas.

CAPITULO II

Aproximación a objetos matemáticos vía el uso de tecnología digital

Eduardo Basurto Hidalgo

Benemérita Escuela Nacional de Maestros

Resumen

La incorporación de tecnologías digitales en el aula es cada vez más una realidad en muchos países, no obstante, el dotar de dispositivos a las escuelas o incluso en algunos casos a cada estudiante, es apenas el cierre de la primera brecha digital, la del equipamiento, pero queda una segunda brecha digital que apenas comienza a cerrarse, la de lograr más y mejores aprendizajes apoyados en el uso de estos dispositivos. Por tal motivo, el presente trabajo pretende mostrar ideas puntuales sobre el uso de tecnología digital que permiten llevar a estudiantes de educación media a tener un pensamiento más plausible, es decir a tener certeza sobre la viabilidad de sus ideas en matemáticas, aún sin la presencia de pruebas formales que son factibles de exigirse hasta la educación superior.

Palabras clave: tecnologías, digitales, pensamiento, plausible.

Introducción

El número de niños matriculados en primaria y secundaria en América Latina y el Caribe pasó de 53 millones a 127 millones entre 1970 y 2010. De hecho, en el mismo periodo de tiempo el promedio del total de años de escolaridad completos en América Latina y el Caribe prácticamente se ha duplicado como muestran las siguientes Figuras 1 y 2. Con lo que es posible considerar que en estas décadas ha existido un avance en la permanencia y cobertura educativa. Esto evidentemente no es equivalente a una mejora en la calidad de educación ya que en esta última intervienen más factores. Por otro lado, en términos de tecnología digital cuando se hace referencia a la brecha digital es necesario distinguir dos dimensiones. La primera es la brecha internacional, que plantea problemas clásicos sobre la difusión "relativamente lenta e irregular" del progreso tecnológico desde los países de origen hacia el resto del mundo. La segunda dimensión es la brecha doméstica la cual se centra en la inclusión universal, el crecimiento con equidad y la aparición de una nueva forma de exclusión CEPAL (2003).

Figura 1. Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean (2014).

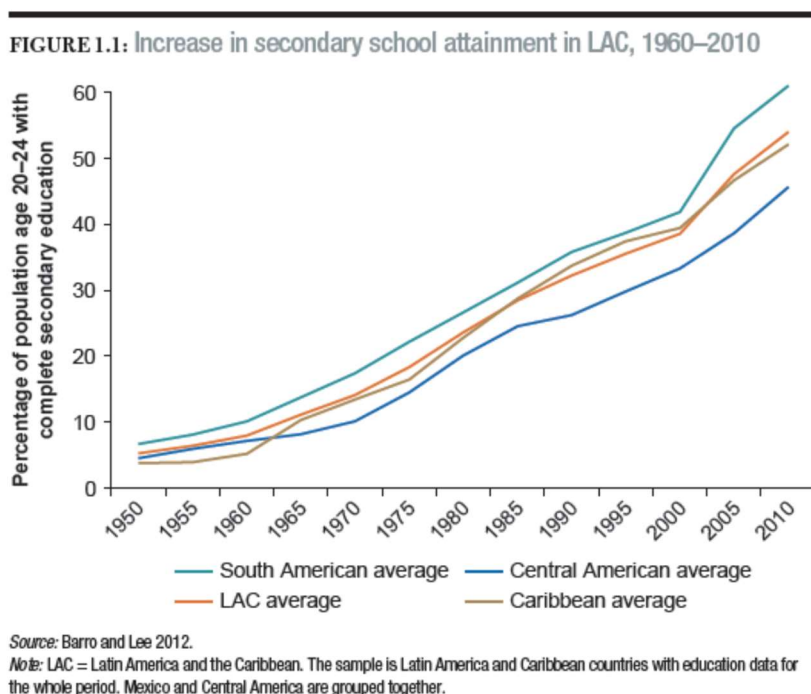


Figura 2. Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean (2014).

TABLE 1.1: Average educational attainment of the adult population, 1960–2010
years of schooling completed

	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Caribbean average	4.3	6.1	7.5	8.9	9.3	10.3
Central American average	3.8	4.5	6.2	7.4	8.2	9.6
South American average	4.5	5.9	7.2	8.3	8.9	10.5
LAC average	4.3	5.5	6.9	8.2	8.8	10.2
East Asian average	5.3	7.3	8.6	9.9	10.8	12.3
OECD average	7.7	9.0	10.1	10.8	11.3	12.1

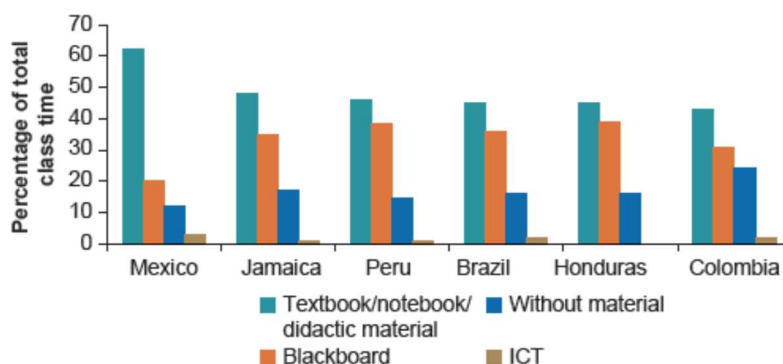
Source: Barro and Lee 2012.
Note: LAC = Latin America and the Caribbean; OECD = Organisation for Economic Co-operation and Development. Based on average years of schooling completed for the population age 20 to 24. The sample is Latin America and Caribbean countries with education data for the whole period. The OECD average is calculated for 33 countries with education data for whole period. The East Asian average is calculated for four countries and two special administrative regions with education data for the whole period. Full table in Annex 1.1.

En esta segunda dimensión y en relación al sector educativo, existe una primera brecha digital en la que uno de sus aspectos es el acceso. Al respecto, en

México, cálculos con base en el Censo de Escuelas, Maestros y Alumnos de Educación Básica y Especial (CEMABE, 2013), indican que en promedio el 45.6% de las escuelas de educación preescolar, el 64.2% de las escuelas de educación primaria y el 85.1% de las escuelas de educación secundaria cuentan con equipos de cómputo que sirven. Lo cual es interesante comprobarlo con la información contenida en la figura 3.

Figura 3. Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean (2014).

FIGURE 2.8: Teachers' use of learning materials



Source: World Bank data.

Note: ICT = information and communication technology.

Por lo que podemos observar que a pesar de que se ha avanzado en el acceso, queda por abordar una segunda brecha digital en la educación, referida al uso y apropiación de estas tecnologías para el aprendizaje.

Aprovechemos las herramientas

El hombre ha podido extender sus capacidades cognitivas vía la interacción establecida con herramientas materiales y simbólicas. El desarrollo del conocimiento ha estado acompañado del uso de las tecnologías digitales y no digitales. Investigaciones como las de Duval (1998), Godino y Batanero (1999), D'Amore (2001), entre otros, han afirmado el hecho de que la actividad matemática, dada la generalidad de su objeto de estudio, es esencialmente simbólica.

Como menciona Moreno (2014), el conocimiento depende, en todos los casos, de la mediación de los sistemas semióticos de representación. En el caso de

las matemáticas, nos permite llegar a la conclusión de que no existen representaciones intrínsecas de los mismos, no hay pues objetos matemáticos al margen de una actividad semiótica. Aquí es importante distinguir entre el problema epistemológico y el didáctico. En el primer caso, el objeto matemático “nace” cuando producimos una representación que nos permite hablar de una experiencia en trance de ser matematizada. Ahora bien, desde la perspectiva didáctica, quien aprende está sometido a la presión de un objeto frente a él y su problema consiste en integrar las distintas perspectivas que ofrecen los sistemas de representación en juego. “El sentimiento de que algo está allí, debajo de las representaciones, conduce a una ilusión de realismo como si las representaciones tan solo describieran una realidad que ya existía anteriormente, al margen de las representaciones” (Moreno 2014, p. 314).

Al refractar el objeto matemático en el medio digital, aparecen posibilidades nuevas para la justificación y la prueba de fenómenos nuevos asociados al objeto ahí representado. De ninguna forma insinuamos una sustitución abrupta de la epistemología tradicional, sino, más bien, subrayamos que estamos entrando a una nueva fase de exploración y de encuentro de formas distintas (pero no contradictorias entre ellas) de representar y concebir el objeto matemático. Ese es el rol principal de los objetos borde: nos brindan la posibilidad de considerar simultáneamente dos formas de conceptualizar: la digital y la de lápiz y papel (Moreno, 2014).

Por otra parte, ha surgido una creciente utilización de la tecnología digital en los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas como lo muestran los trabajos de Arzarello (2004), Borba y Villareal (2006), Artigue (2002), Vérillon y Rabardel (1995), Guin y Trouche (1999), entre otros.

Estos hechos vuelven necesario recurrir a la semiótica para entender los procesos de significado y sentido expresados en sistemas de signos surgidos en las producciones verbales y escritas de los sujetos al resolver tareas donde intervienen tecnologías digitales.

Propósito del trabajo

Se pretende generar la exploración de situaciones problemáticas cotidianamente incluidas en el currículo de la enseñanza media en matemáticas en México, a través de entornos tecnológicos digitales con prestaciones didácticas en sus aplicaciones, tales como la retroalimentación inmediata entre distintas representaciones de un mismo objeto matemático, así como la exploración dinámica de dichas representaciones. Esto a fin de reconocer la posibilidad que este tipo de dispositivos tiene para reinventar secuencialmente las situaciones problemáticas y llevarlas más allá de la simple ejecución sin una trayectoria reflexiva de dichos tipos de problemas, además de hacer factible una mayor certeza en las conjeturas de los estudiantes sin necesidad de pruebas formales y optimizando los procesos de abstracción.

Perspectiva teórica

La evolución cognitiva de los sujetos desde el enfoque de la aproximación instrumental, dado que las acciones instrumentales producen una versión del conocimiento. Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser *“una entidad mixta, parte artefacto y parte proyectos cognitivos los cuales lo hacen un instrumento”* (p.253). La conversión del artefacto en instrumento involucra una evolución en los diferentes usos del artefacto. Este proceso es llamado ***génesis instrumental***.

El proceso de *génesis instrumental* según Artigue (2002) se desarrolla en dos direcciones:

La primera se enfoca hacia el artefacto, asimilando progresivamente sus potencialidades y limitaciones, transformándolas para usos específicos. Esta parte es conocida como: ***instrumentalización del artefacto*** La segunda se dirige al sujeto, principalmente a la apropiación de planes de acción instrumentada los cuales eventualmente tomarán forma de técnicas instrumentadas que permitan dar respuestas a tareas: ***instrumentación***

El siguiente esquema retomado de Guin y Trouche (1999) intenta esquematizar el proceso de génesis instrumental (figura 4).

Figura 4. Esquema del proceso de génesis instrumental.



Resolución de problemas y el uso de tecnología digital

Menciona Santos que “El método inquisitivo se refiere a la importancia de que los estudiantes desarrollen la comprensión del conocimiento matemático a partir de la identificación de dilemas y la formulación de preguntas que se representan y exploran en términos de recursos y estrategias matemáticas.” (2007 p.57).

Este uso constante de herramientas computacionales permite a los estudiantes construir representaciones dinámicas de los conceptos y problemas matemáticos, lo cual resulta importante para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las justifiquen o soporten.

La cita anterior refleja la esencia del enfoque actual de muchos currículos de matemáticas en diversos países, ya que, en todos ellos, este ciclo de visualizar, reconocer, examinar, argumentar, y comunicar resultados son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes deben practicar sistemáticamente. Ahora bien, estos ciclos pueden ser enriquecidos de manera sustancial con la ayuda de herramientas de tecnología digital.

El empleo de instrumentos de tecnología digital en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no solamente facilita la identificación e implementación de estrategias de resolución, sino también potencia el repertorio de las heurísticas. El uso de la tecnología influye directamente en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas.

Esto es posible ya que las herramientas digitales permiten al estudiante despojarse de esfuerzos largos y complejos en algoritmos que si bien son parte importante del conocimiento matemático que el estudiante debe desarrollar, también es fundamental que centre su actividad cognitiva de análisis de relaciones, regularidades, ejemplos y contraejemplos, ya que en muchos casos el estudiante desvía la mayor parte de su atención a las técnicas y procesos en momentos en los que debe centrarse en la reflexión.

Kaput afirmó que:

...las limitaciones mayores del uso de la computadora en las siguientes décadas serían probablemente menos debidas a las limitaciones tecnológicas y más a las limitaciones de la imaginación humana y a las restricciones de los viejos hábitos y estructuras sociales (1992, p. 515).

A más de dos décadas de esta afirmación es evidente que se ha vuelto una realidad ya que hoy en día, una dificultad al intentar utilizar herramientas digitales en la enseñanza de la matemática, es el cambio necesario en la actuación pedagógica del profesor, ya que su uso implica un cambio de estrategia de enseñanza. Ya no es útil un esquema expositivo y lineal. Se requiere diseñar y experimentar estrategias para facilitar la interacción del alumno con los conceptos matemáticos. Así, surgen actividades como: experimentar, conjeturar, generalizar, poner a prueba hipótesis, deducir, reflexionar, etc., que son elementos extraños a una situación de clases expositiva normal.

Para organizar la forma en que la tecnología pueda tener efectos importantes en la educación de las matemáticas, Rubin (2000) propone cinco tipos de oportunidades generadas por las TIC, las cuales son: conexiones dinámicas;

herramientas sofisticadas; comunidades ricas en recursos matemáticos; herramientas de diseño y construcción; y herramientas para explorar complejidad.

En este sentido, el dispositivo tecnológico como la calculadora HP Prime concebido desde su diseño para permitir este tipo de oportunidades de manera natural desde sus módulos de aplicaciones creados para ofrecer mayor ergonomía cognitiva a los estudiantes.

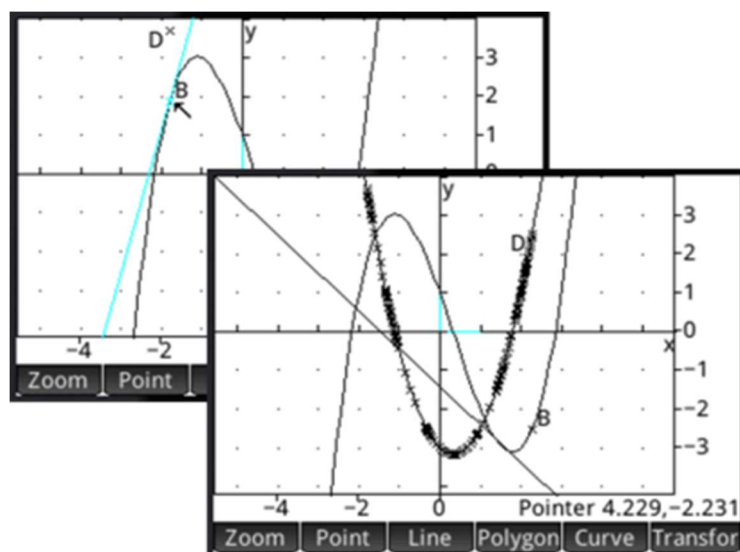
Por ejemplo, sin mayores técnicas instrumentadas un alumno podrá explorar en cada aplicación diferentes representaciones de un mismo objeto matemático a través de la terna de herramientas, SYMB, PLOT y NUM, en cualquier aplicación (ver figura 5).

Figura 5. Esquema de vinculación entre las herramientas de representación y las aplicaciones del dispositivo



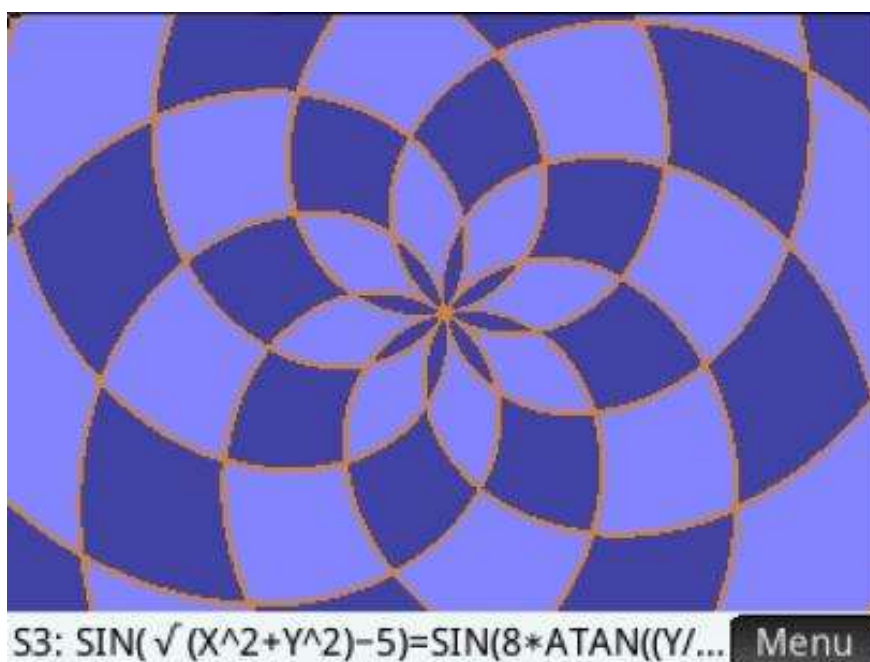
Dentro de sus módulos de aplicación esta la presencia de elementos dinámicos como se ve en la figura 6.

Figura 6. Ejemplo de elementos dinámicos en gráficas.



Al respecto de poder explorar la complejidad sin complicaciones técnicas se tiene un módulo de graficas avanzadas que permite profundizar en gráficos poco explorados como son, secciones cónicas, fórmulas generales de polinomios y ecuaciones implícitas en x e y entre otras.

Figura 7. Ejemplo de un gráfico avanzado.



Desarrollo del tipo de actividades que se pueden plantear con este tipo de tecnologías

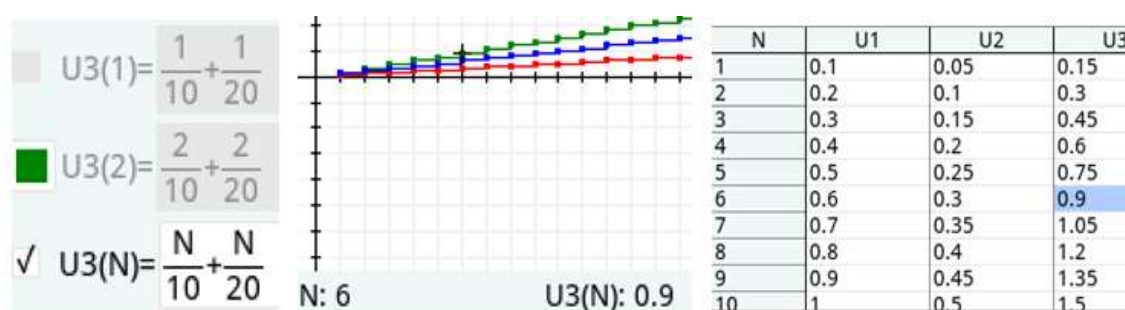
Situación 1:

Un tinaco tiene dos llaves para lograr una cierta mezcla de dos componentes, una de ellas puede llenarlo en diez minutos, si trabaja sola y a toda su capacidad; la otra, trabajando también sola, a toda su capacidad, puede llenarlo en veinte minutos. Si ambas llaves trabajan simultáneamente a toda su capacidad ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el tinaco?

Este problema será resuelto en el medio estático o de papel y lápiz junto con las estimaciones y discusión de los posibles caminos de resolución en este medio. Además de sus potencialidades en el entorno de aula como secuenciarían su intervención.

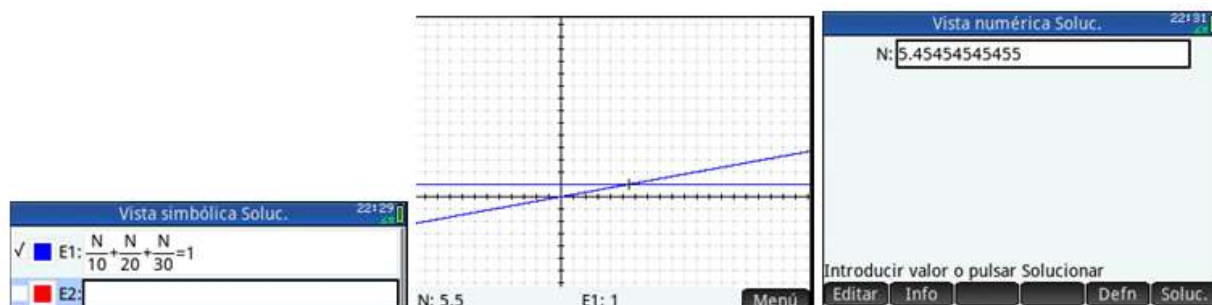
Sobre la situación 1, se analizarán las variantes que ofrece el medio tecnológico para explorar la situación es su estado inicial por ejemplo vía sucesiones. figura 8.

Figura 8. Interacciones de las representaciones Symb, Plot y Num de la HP Prime en la aplicación de sucesiones



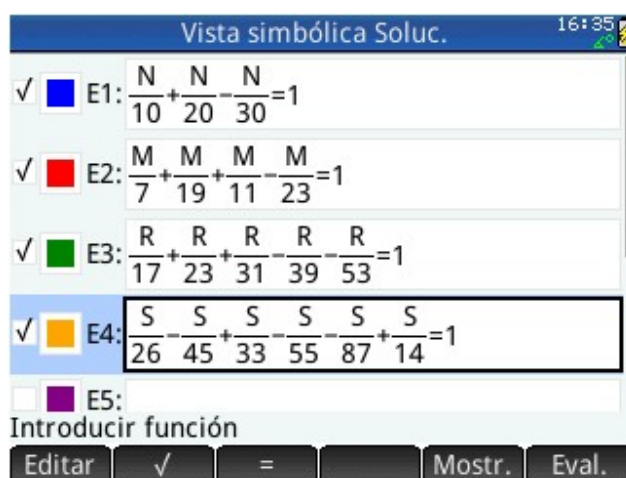
De ahí se verá como a través del medio tecnológico se puede ir a donde antes o bien no se arribaba por falta de tiempo o por el nivel de complejidad en términos de algoritmos pero que no obstante siempre estuvo ahí para su análisis. Como, ¿qué sucedería si tuviéramos más llaves? (figura 9)

Figura 9. Interacciones de las representaciones Symb, Plot y Num de la HP Prime en la aplicación de ecuaciones.



O bien, ¿qué sucedería si no solo hubiera llaves que introducen líquido al tinaco y existieran también llaves que extrajeran líquido del tinaco a distintas velocidades? (figura 10).

Figura 10. Exploración de varias posibilidades de llaves en la vista simbólica de ecuaciones.



Situación 2.

Construiremos la representación gráfica de un teorema poco conocido que es el Teorema de Napoleón, el cual afirma que: Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de los lados de un triángulo cualquiera, todos al interior o todos al exterior, entonces los centros de los triángulos equiláteros forman también un triángulo equilátero.

En la situación 2, lo que es muy destacable es la interacción y distinción de las propiedades que pueden variar y las que no en la representación dinámica de la construcción gracias a sus prestaciones dinámicas (figura 11).

Figura 11. Interacciones de las representaciones Symb y Plot de la HP Prime en la aplicación de geometría.



Conclusiones

Como todos sabemos ya son algunos años en que los sistemas educativos han intentado incorporar artefactos de tecnología digital que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

No obstante como hemos visto, desde el punto de vista macro de la cobertura y permanencia en los grados escolares, así como en la llamada brecha digital; en educación el acceso es solo la primera parte, la segunda parte, en la que los equipamientos deben dar como fruto más y mejores aprendizajes, necesita la intervención de muchos aspectos entre los que destacan la capacitación de los docentes en servicio y en formación, así como implementar esquemas pedagógicos más efectivos y crear nuevos ambientes organizacionales en las aulas, para lo cual, entre muchas otras cosas; la creación de nuevas estructuras curriculares que den paso a estas innovaciones educativas, estructuras basadas en los resultados muchas investigaciones así como del análisis de experiencias de éxito.

Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3), 245 – 274.
- Arzarello, F. (2004). Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories. *Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference*. Copenhagen, Denmark. July 4-11.
- Barbara B y Luque, J. (2014). Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean. World Bank Group.
- Borba, M. y Villareal, M. (2006). Humans – with – Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. New York: Springer.
- Comisión Económica para América Latina y el Caribe, CEPAL (2003). Los caminos hacia una sociedad de la información en América Latina y el Caribe, LC/G.2195/Rev. 1-P, Santiago de Chile

- CEMABE (2013). Censo de Escuelas, Maestros y Alumnos de Educación Básica y Especial. INEGI
- D'Amore, B. (2001) Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position <<naïve>> dans une théorie <<réaliste>> contre le modèle <<anthropologique>> dans une théorie <<pragmatique>>. En A. Gagatsis (Ed), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).
- Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, 6, 139-196.
- Godino, J. D; y Batanero, C. (1999). The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics. Paper presented at the *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education*.
- Guin, D y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into a mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3(3),195 – 227.
- Moreno, L. (2014). *¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática?* Luis Moreno–Armella. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática / Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica. - Año 8, No. 11 (Diciembre 2013). San José, C.R. : Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica, 2013- xi.
- Rubin, A. (2000). *Technology meets math education: Envisioning a practical future forum on the future of technology in education*. En <http://www.air-dc.org/forum/abRubin.htm>
- Santos, M. (2007). Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas.
- Vérillon, R. y Rabardel, G. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education* 10(1), 77 -101.

CAPÍTULO III

La tecnología en las mallas curriculares de la formación de maestros de matemáticas

Maricela Bonilla González¹

Orlando Vázquez Pérez¹

Saúl Elizarraras Baena¹

José Luis Medardo Quiroz Gleason¹

¹Escuela Normal Superior de México

Resumen

En la formación del profesorado de matemáticas el uso de las tecnologías es de suma importancia no sólo para que los docentes en formación las utilicen cuando estudian los contenidos de la disciplina sino para que las apliquen en la enseñanza que llevan a cabo en las escuelas secundarias. Con la finalidad de identificar en cuáles cursos y cómo está presente el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se revisaron las mallas curriculares de la formación de profesores, lo anterior debido a que, en las escuelas normales, la Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido reformada en varias ocasiones, las tres últimas reformas fueron en 1999, 2018 y 2022. Los resultados de esta revisión indican que en la malla curricular 2022 hay una mayor presencia de cursos relacionados con el uso de la tecnología comparado con las mallas curriculares de 1999 y 2018.

Palabras clave: Mallas curriculares, formación de maestros, uso de tecnología.

Introducción

Debido a los avances tecnológicos actuales hay una gran necesidad de implementar nuevas estrategias que ayuden a los estudiantes en la comprensión de los contenidos estudiados en las diferentes disciplinas. El uso de las tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un tema que ha ido adquiriendo cada vez mayor relevancia pues puede permitir al estudiante la visualización de representaciones de los objetos matemáticos de manera dinámica. Aunque las matemáticas han sido una de las disciplinas que ha tenido beneficios significativos por la amplia gama de herramientas que pueden ser incorporadas para la enseñanza, sigue siendo frecuente el uso de metodologías tradicionales en el aula que privilegian lo conceptual y lo memorístico.

Desarrollo

La incorporación de recursos y materiales didácticos en el aula ayuda al docente a facilitar la enseñanza y a los alumnos mejorar los aprendizajes cuando se estudia un determinado contenido del programa de curso. La amplia gama de ambientes computacionales que se pueden emplear proporcionan medios idóneos para que los estudiantes exploren, analicen, identifiquen, examinen y comuniquen una gran cantidad de ideas matemáticas. En la formación del profesorado de matemáticas el uso de las tecnologías es de suma importancia no sólo para que los docentes en formación estudien contenidos de la disciplina sino para que las apliquen en la enseñanza que llevan a cabo en las escuelas secundarias.

Centeno (2021) analizó la relación que existe entre la formación tecnológica recibida y las competencias digitales docentes, en los resultados se observa que los profesores emplean dichas tecnologías ocasionalmente para organizar su curso, evaluar y dar atención tutorial a los estudiantes o realizar actividades de investigación.

Saucedo, Jiménez, Salinas y Muñoz (2016) argumentan que el docente debe saber utilizar e incorporar las tecnologías en las actividades diarias de los alumnos, estos autores refieren que es importante que el futuro maestro en su preparación profesional tenga en cuenta desarrollar competencias tales como: 1) tener una actitud positiva hacia las tecnologías, 2) conocer los usos de estas herramientas en el ámbito educativo, 3) emplear las tecnologías en el campo de su área de conocimiento, 4) proponer actividades formativas y 5) evaluar empleando las herramientas tecnológicas.

Castellano (2010) considera que la integración de medios tecnológicos en la enseñanza de una asignatura requiere de más que sólo conocer y saber utilizar las herramientas, requiere manejar las didácticas emergentes de una verdadera integración tecnologías-disciplina.

Artigue (2002) señala que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente pueden ser de gran utilidad para que los estudiantes comprueben resultados, refuercen conceptos; o puedan usarlos como herramientas para

elaborar conjeturas e inferencias sobre las propiedades de objetos matemáticos y en el caso de los profesores los puedan manejar como recursos para el desarrollo de su clase.

Derivado de lo anterior, en la formación de profesores de matemáticas es fundamental la inclusión de cursos que estén relacionados con el uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con la finalidad de ofrecer mejores entornos de aprendizaje que incluyan condiciones que favorezcan la adquisición de conocimientos por parte del estudiante además de que puedan aplicar dichas tecnologías en el diseño e implementación de secuencias didácticas.

Metodología

Es una investigación de tipo documental interpretativa y con enfoque cualitativo (Cohen, Manion y Morrison, 2018). Se revisaron las mallas curriculares de tres diferentes planes de estudio para la formación de profesores de matemáticas de la educación secundaria (SEP, 1999a; SEP, 2018a y SEP, 2022a) con la finalidad de identificar en cuáles cursos y cómo está presente el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Resultados

En este apartado se presentan las mallas curriculares de los diferentes planes de estudio que fueron revisados, así como los cursos relacionados con el uso de la tecnología. En la Figura 1 se muestra la malla curricular 1999 (SEP, 1999a), la carrera se llama Licenciatura en educación secundaria, especialidad de matemáticas.

En esta malla se identifican cursos de *Formación general* (que están en la zona delimitada por una línea punteada) que son aquellos que lleva un docente en formación no importando si estudia la licenciatura en educación preescolar, primaria o secundaria. De *Formación común* que lleva un estudiante de la licenciatura en educación secundaria no importando la especialidad de la que se trate (zona delineada de color negro). De formación específica por especialidad y son 17 (sombreados con color gris); dentro de estos cursos se identifica un curso

relacionado con el uso de la tecnología llamado *Tecnología y didáctica de las matemáticas* el cual se ubica en el sexto semestre de la carrera.

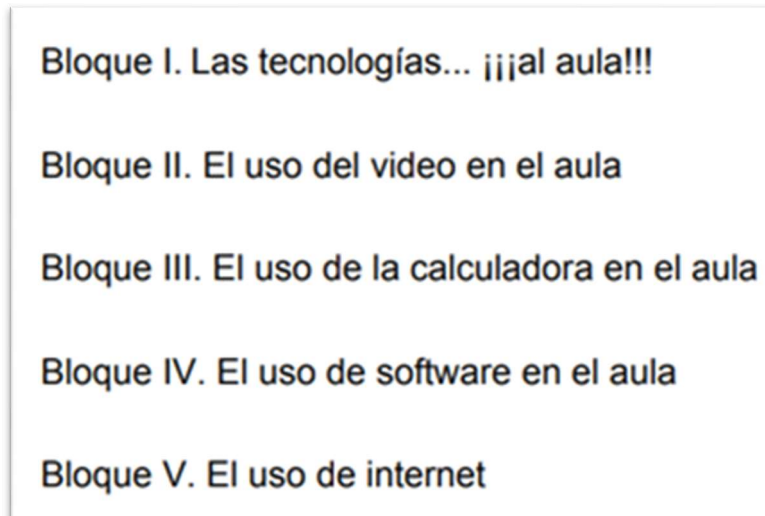
Figura 1. Malla curricular 1999 de la Licenciatura en educación Secundaria, especialidad de Matemáticas

Primer semestre	Horas/ Créditos	Segundo semestre	Horas/ Créditos	Tercer semestre	Horas/ Créditos	Cuarto semestre	Horas/ Créditos	Quinto semestre	Horas/ Créditos	Sexto semestre	Horas/ Créditos	Séptimo semestre	Horas/ Créditos	Octavo semestre
Bases filosóficas, legales y organizativas del sistema educativo mexicano	4/7.0	La educación en el desarrollo histórico de México I	4/7.0	La educación en el desarrollo histórico de México II	4/7.0	Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación I	4/7.0	Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación II	4/7.0	Seminario de Investigación en educación matemática Seminario de temas selectos de historia de las matemáticas	2/3.5 2/3.5			
Estrategias para el estudio y la comunicación I	6/10.5	Estrategias para el estudio y la comunicación II	4/7.0	Pensamiento algebraico	4/7.0	Figuras y cuerpos geométricos	4/7.0	Medición y cálculo geométrico	4/7.0	Tecnología y didáctica de las matemáticas	4/7.0			
Problemas y políticas de la educación básica	6/10.5	Introducción a la enseñanza de las matemáticas	4/7.0	Los números y sus relaciones	4/7.0	Plano cartesiano y funciones	4/7.0	Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia	4/7.0	La predicción y el azar	4/7.0			
		La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas I	4/7.0	La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas II	4/7.0	Procesos de cambio o variación	4/7.0	Escalas y semejanza	4/7.0	Presentación y tratamiento de la información	4/7.0			
Propósitos y contenidos de la educación básica I (Primaria)	4/7.0	Propósitos y contenidos de la educación básica II (Secundaria)	4/7.0	La expresión oral y escrita en el proceso de enseñanza y de aprendizaje	4/7.0	Planeación de la enseñanza y evaluación del aprendizaje	4/7.0	Opcional I	4/7.0	Opcional II	4/7.0	Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente I	6/10.5	Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente II
Desarrollo de los adolescentes I. Aspectos generales	6/10.5	Desarrollo de los adolescentes II. Crecimiento y sexualidad	6/10.5	Desarrollo de los adolescentes III. Identidad y relaciones sociales	6/10.5	Desarrollo de los adolescentes IV. Procesos cognitivos	6/10.5	Atención educativa a los adolescentes en situaciones de riesgo	6/10.5	Gestión escolar	6/10.5	Trabajo docente I	10/17.5	Trabajo docente II
Escuela y contexto social	6/10.5	Observación del proceso escolar	6/10.5	Observación y práctica docente I	6/10.5	Observación y práctica docente II	6/10.5	Observación y práctica docente III	6/10.5	Observación y práctica docente IV	6/10.5			

Tomado de: SEP 1999a, p. 40

El curso *Tecnología y didáctica de las matemáticas* (SEP, 1999b) se describe como un espacio para reflexionar respecto a las ventajas que pueden ofrecer las tecnologías de la información y la comunicación al proceso de estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, analizando las formas en que conviene usarlas de acuerdo con los fines didácticos y los impactos que ello produce. Los contenidos de dicho curso son los que se presentan en la figura 2.

Figura 2. Organización de contenidos del curso Tecnología y didáctica de las matemáticas.



Tomado de: SEP 1999b, p. 3

En este programa al inicio se incluyen aspectos teóricos sobre las tecnologías y su impacto en el ámbito educativo. En los bloques subsecuentes, con el uso del video, la calculadora, el software y el internet, la intención es que los estudiantes reflexionen en torno a su uso en el aula como recurso didáctico y cuenten con elementos que les permitan una adecuada ubicación dentro de una secuencia didáctica. Como se puede observar, los contenidos de este curso contemplan temas generales sobre el uso de las tecnologías y no de manera particular que sirvan al estudiante para resolver problemas de las matemáticas.

En la malla curricular 2018 (SEP, 2018a) que está organizada por 53 cursos distribuidos en cuatro trayectos formativos (Bases teórico metodológicas para la enseñanza, Formación para la enseñanza y el aprendizaje, Práctica profesional y Optativos), no se incluye ningún curso que esté dedicado totalmente al uso de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, hay cursos en los que se considera una unidad o un contenido relacionado con el uso dichas tecnologías, a saber, *Innovación para la enseñanza de las matemáticas*, *Matemáticas en la ciencia y la tecnología* y *Modelación* (ver figura 3).

Figura 3. Malla curricular 2018 de la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Desarrollo en la adolescencia 4 h / 4.5	Desarrollo socioemocional y aprendizaje 4 h / 4.5	Planeación y evaluación 6 h / 6.75	Neurociencia en la adolescencia 4 h / 4.5	Educación inclusiva 4 h / 4.5	Fundamentos de la educación 4 h / 4.5	Retos actuales de la educación en México 4 h / 4.5	Aprendizaje en el Servicio 20 h / 6.4
Problemas socioeconómicos y políticos de México 4 h / 4.5	Teorías y modelos de aprendizaje 4 h / 4.5		Gestión del centro educativo 4 h / 4.5	Metodología de la investigación 4 h / 4.5	Pensamiento pedagógico 4 h / 4.5	Modelación 4 h / 4.5	
Pensamiento algebraico 4 h / 4.5	Álgebra y funciones 4 h / 4.5	Teoría de la aritmética 4 h / 4.5	Trigonometría 4 h / 4.5	Estadística inferencial 4 h / 4.5	Cálculo diferencial 4 h / 4.5	Cálculo integral 6 h / 6.75	
Sentido numérico 4 h / 4.5	Magnitudes y medidas 4 h / 4.5	Pensamiento estocástico 4 h / 4.5	Geometría plana y del espacio 4 h / 4.5	Geometría analítica 4 h / 4.5	Trabajo multidisciplinar con la física 4 h / 4.5	Proyecto multidisciplinar 4 h / 4.5	
Razonamiento geométrico 4 h / 4.5	Tratamiento de la información 4 h / 4.5	Didáctica de las matemáticas en la educación básica 6 h / 6.75	Innovación en la enseñanza de las matemáticas 4 h / 4.5	Matemáticas en la ciencia y tecnología 4 h / 4.5	Historia y filosofía de las matemáticas 4 h / 4.5	Didáctica de las matemáticas en la educación obligatoria 6 h / 6.75	
	Optativo 4 h / 4.5	Optativo 4 h / 4.5	Optativo 4 h / 4.5	Optativo 4 h / 4.5	Optativo 4 h / 4.5		
Herramientas para la observación y análisis de la escuela y comunidad 4 h / 4.5	Observación y análisis de la cultura escolar 4 h / 4.5	Práctica docente en el aula 6 h / 6.75	Estrategias de trabajo docente 6 h / 6.75	Innovación para la docencia 6 h / 6.75	Proyectos de intervención docente 6 h / 6.75	Práctica profesional y vida escolar 6 h / 6.75	
30 h / 33.75	34 h / 38.25	36 h / 40.5	36 h / 40.5	36 h / 40.5	36 h / 40.5	30 h / 33.75	20 h / 6.4
Inglés. Inicio de la comunicación básica 6 h / 6.75	Inglés. Desarrollo de conversaciones elementales 6 h / 6.75	Inglés. Intercambio de información e ideas 6 h / 6.75	Inglés. Fortalecimiento de la confianza en la conversación 6 h / 6.75	Inglés. Hacia nuevas perspectivas globales 6 h / 6.75	Inglés. Conversar en comunidades independientes 6 h / 6.75		
Trayecto formativo	Bases teórico metodológicas para la enseñanza			5 cursos optativos para cursarse del 2° al 6° semestre, con 4 horas y un valor de 4.5 créditos cada uno.	El trabajo de Titulación tiene un valor de 10.8 créditos, en cualquiera de las modalidades.	Total de créditos: 284.95	
Trayecto formativo	Formación para la enseñanza y el aprendizaje						
Trayecto formativo	Práctica profesional						
Trayecto formativo	Optativos						

Tomado de: SEP, 2018a

En cuanto a *Innovación para la enseñanza de las matemáticas* (SEP, 2018b) es un curso que se lleva en cuarto semestre, contempla 3 unidades de aprendizaje (ver figura 4). En la unidad 3 se presenta un contenido relacionado con el uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, esta unidad se llama *Innovación en la enseñanza con otros soportes* (ver Figura 5), la cual contempla el estudio de *Soportes tecnológicos*, específicamente aplicaciones Scratch para aprender matemáticas. Con este contenido se pretende que el

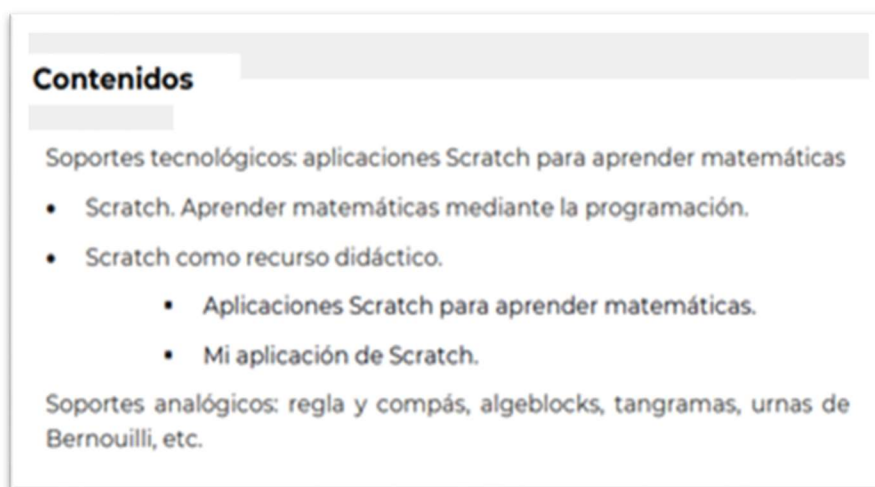
estudiante normalista diseñe y desarrolle actividades para el aprendizaje de las matemáticas mediante dicho soporte tecnológico.

Figura 4. Organización de contenidos del curso Innovación en la enseñanza de las matemáticas.



Tomado de: SEP 2018b, p. 15

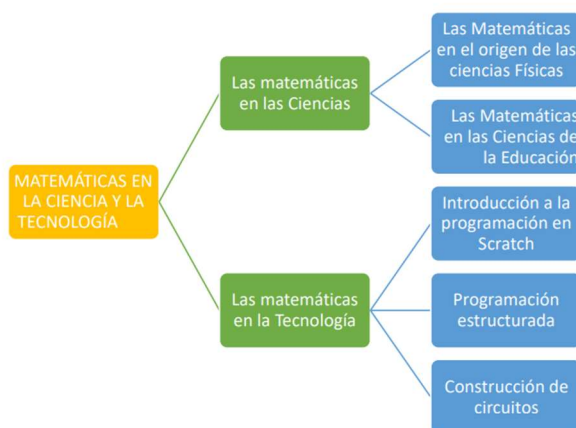
Figura 5. Unidad de aprendizaje III. Innovación en la enseñanza con otros soportes



Tomado de: SEP 2018b, p. 39

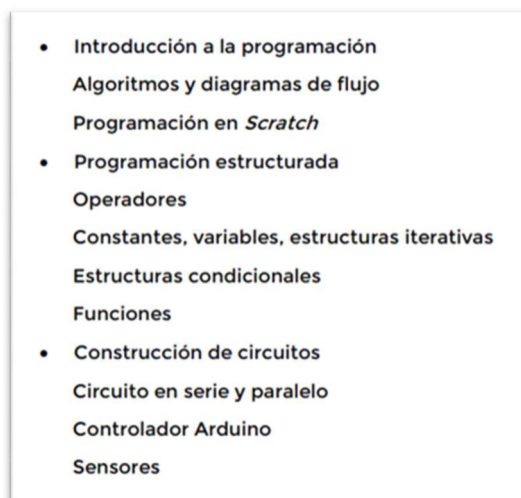
En el curso *Matemáticas en la ciencia y la tecnología* (SEP, 2018c) que está organizado en dos unidades de aprendizaje (ver figura 6): *Las matemáticas en las ciencias* y *Las matemáticas en la tecnología*, esta última unidad incluye contenidos que se asocian el uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (ver Figura 7) en donde se espera que el estudiantado diseñe recursos y herramientas tecnológicas para la educación secundaria, a partir de la vinculación de la tecnología, las matemáticas y las ciencias en situaciones problemáticas.

Figura 6. Organización de contenidos del curso Matemáticas en la ciencia y la tecnología



Tomado de: SEP 2018c, p. 17

Figura 7 Unidad de aprendizaje II. Las matemáticas en la tecnología



Tomado de: SEP 2018c, p. 3

La *Modelación* (SEP, 2018d) contempla dos unidades de aprendizaje (ver figura 8), en la primera unidad se abordan aspectos teóricos de la modelación y en la segunda, *Modelos lineales y no lineales*, en la que se presenta el contenido *Tecnologías para la modelación* cuya inclusión es desde la perspectiva que la programación también es una forma de modelar un problema (ver Figura 9).

Figura 8. Organización de contenidos del curso Modelación



Tomado de SEP 2018d, p. 33

Figura 9. Unidad de aprendizaje II. Modelos lineales

- **Modelos lineales: crecientes y decrecientes**
- **Multilineales**
- **Modelos no lineales**
- **Tecnologías para la modelación**

Tomado de: SEP 2018d, p. 33

Es importante decir que en esta malla se contempla un trayecto de cursos optativos (ver figura 10) en el que se pueden llevar cuatro cursos sobre tecnología

que brindan la oportunidad de complementar la formación de los estudiantes normalistas (Software para el estudio de las matemáticas, Entornos virtuales de aprendizaje, Lenguajes de programación, Diseño de APP y Robótica educativa), sin embargo, no todos los estudiantes eligen cursar este trayecto optativo dentro de los cuatro trayectos que pueden elegir.

Figura 10. Trayectos optativos de la malla curricular 2022

Primera opción						
Nombre del trayecto: Educación financiera	Cultura financiera 4 h / 4.5	Matemáticas financieras 4 h / 4.5	Economía social y emprendimiento 4 h / 4.5	Gestión de la sostenibilidad 4 h / 4.5	Investigación de operaciones 4 h / 4.5	
Segunda opción						
Nombre del trayecto: Matemáticas superiores	Geometría no euclidianas 4 h / 4.5	Matemáticas finitas 4 h / 4.5	Álgebra Superior 4 h / 4.5	Álgebra Lineal 4 h / 4.5	Geometría de la medida 4 h / 4.5	
Tercera opción						
Nombre del trayecto: Tecnología educativa	Software para el estudio de las matemáticas 4 h / 4.5	Entornos virtuales de aprendizaje 4 h / 4.5	Lenguajes de programación 4 h / 4.5	Diseño de APP 4 h / 4.5	Robótica educativa 4 h / 4.5	
Cuarta opción						
Nombre del trayecto: Investigación en didáctica de las matemáticas	Introducción a la investigación en Didáctica de las Matemáticas 4 h / 4.5	El campo de la Didáctica de las Matemáticas 4 h / 4.5	Metodologías de investigación 4 h / 4.5	El análisis e interpretación de datos 4 h / 4.5	El informe de investigación 4 h / 4.5	

Tomado de: SEP 2018a

En el curso *Software para el estudio de las matemáticas* la intención es introducir al estudiante en el uso de softwares, simuladores virtuales, sitios web, soportes y medios tecnológicos para el estudio de las matemáticas. En el curso *Entornos virtuales de aprendizaje* se propone que el estudiante normalista utilice, diseñe y desarrolle entornos virtuales de aprendizaje y propuestas de enseñanza a distancia para el planteamiento de alternativas y toma de decisiones que le permitan desenvolverse con solvencia en su actividad docente. En *Lenguajes de programación* se plantea que el estudiante normalista adquiera las bases algorítmicas y la habilidad en el manejo de lenguajes de programación orientados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En *Diseño de App* que diseñe y utilice innovación tecnológica, así como materiales didácticos con soporte

tecnológico, como parte de su práctica docente en el desarrollo de competencias de sus estudiantes.

En la malla curricular 2022 (SEP, 2022a) que está organizada en 53 cursos distribuidos en 5 trayectos formativos (Fundamentos de la educación, Bases teóricas y metodológicas de la práctica, Práctica profesional y saber pedagógico, Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar y Lenguas, lenguajes y tecnologías digitales) y tres fases (Inmersión, Profundización y Despliegue), se incorporan tres cursos que están directamente vinculados con el uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, estos son: *Software de apoyo a las matemáticas*, *Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas* y *Tecnologías y diseño didáctico*, cabe señalar que en dicha malla se identifican veintidós espacios curriculares que corresponden a la flexibilidad curricular (espacios sombreados de color gris) con el propósito de desarrollar contenidos regionales por entidad federativa, en el caso de las normales de la Ciudad de México, en estos espacios se incorporan dos cursos más relacionados con el uso de la tecnología que son: *Robótica educativa* y *Modelación matemática* (ver figura 11).

Figura 11. Malla curricular nacional 2022. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Trayectos	FASE 1 INMERSIÓN		FASE 2 PROFUNDIZACIÓN				FASE 3 DESPLIEGUE	
	Semestre 01	Semestre 02	Semestre 03	Semestre 04	Semestre 05	Semestre 06	Semestre 07	Semestre 08
Fundamentos de la educación	Organización y legislación del sistema educativo mexicano 4hrs/4.5	Análisis y desarrollo curricular 4hrs/4.5	Filosofía de la educación 4hrs/4.5	Gestión escolar y participación social 4hrs/4.5	Epistemología en Educación Matemática 4hrs/4.5	Historia y filosofía de las matemáticas 4hrs/4.5	Metodología de la investigación en Educación Matemática 8hrs/9	Redacción del informe final del trabajo de titulación 8hrs/9
Bases teóricas y metodológicas de la práctica	Desarrollo en la adolescencia y juventud 4hrs/4.5	Desarrollo socioemocional 4hrs/4.5	Teorías y modelos de aprendizaje 4hrs/4.5	Neurociencias y educación 4hrs/4.5	Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencias 4hrs/4.5	Aprendizaje basado en problemas y en proyectos colaborativos 4hrs/4.5		
Práctica profesional y saber pedagógico	Acercamiento a prácticas educativas y comunitarias 6hrs/6.75	Análisis de prácticas y contextos escolares 6hrs/6.75	Intervención didáctico-pedagógica y trabajo docente 6hrs/6.75	Estrategias de trabajo docente y saberes pedagógicos 6hrs/6.75	Investigación e innovación de la práctica docente 6hrs/6.75	Práctica docente y proyectos de mejora escolar y comunitaria 6hrs/6.75		
Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar	Sentido numérico y teoría de la aritmética 4hrs/4.5	Álgebra y funciones 4hrs/4.5	Geometría analítica 4hrs/4.5	Cálculo diferencial 6hrs/6.75	Cálculo integral 4hrs/4.5	Análisis matemático 4hrs/4.5	Aprendizaje en el servicio 12hrs/13.5	Aprendizaje en el servicio 20hrs/22.5
	Geometría plana y del espacio 4hrs/4.5	Tratamiento de la información 4hrs/4.5	Trigonometría 4hrs/4.5	Pensamiento estocástico 4hrs/4.5	Estadística inferencial 6hrs/6.75	Geometrías no euclidianas 4hrs/4.5		
	Metodologías activas para la interdisciplinariedad 6hrs/6.75	Estrategias para la atención diversificada en matemáticas 6hrs/6.75	Planeación y evaluación diversificada de los aprendizajes 6hrs/6.75	Didáctica de las matemáticas en educación básica 6hrs/6.75	Álgebra superior 4hrs/4.5	Didáctica de las matemáticas en educación media superior 6hrs/6.75		
Lenguas, Lenguajes y tecnologías digitales	Inglés. Inicio de la comunicación básica 4hrs/4.5	Inglés. Desarrollo de conversaciones elementales 4hrs/4.5	Sistemas matemáticos de signos 4hrs/4.5	Comunicación accesible en la educación inclusiva 4hrs/4.5	Alfabetización matemática 4hrs/4.5	Integración curricular en la educación obligatoria 4hrs/4.5	Diseño y análisis de Proyectos de intervención educativa 4hrs/4.5	
	Software de apoyo a las matemáticas 6hrs/6.75	Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas 6hrs/6.75	Tecnologías y diseño didáctico 6hrs/6.75	Diseño de materiales y recursos para la enseñanza de las Matemáticas 4hrs/4.5	Modelación matemática 4hrs/4.5	Robótica educativa 4hrs/4.5		

Tomado de: SEP 2022a

Software de apoyo a las matemáticas (SEP, 2022b), este curso está organizado en tres unidades de aprendizaje y cada una de ellas versa sobre el uso de las tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (ver figura 12), en la unidad I se propone que los estudiantes normalistas adquieran herramientas para el estudio de sus cursos de matemáticas, como el uso de calculadoras, el manejo de graficadores y simuladores, así como otros materiales en diversos soportes. También es importante la iniciación a la programación, de tal suerte que sea un medio para resolver problemas (Unidad II). Finalmente, en la última unidad se espera que busquen y seleccionen software para la atención diversificada en la enseñanza de las matemáticas (Unidad III).

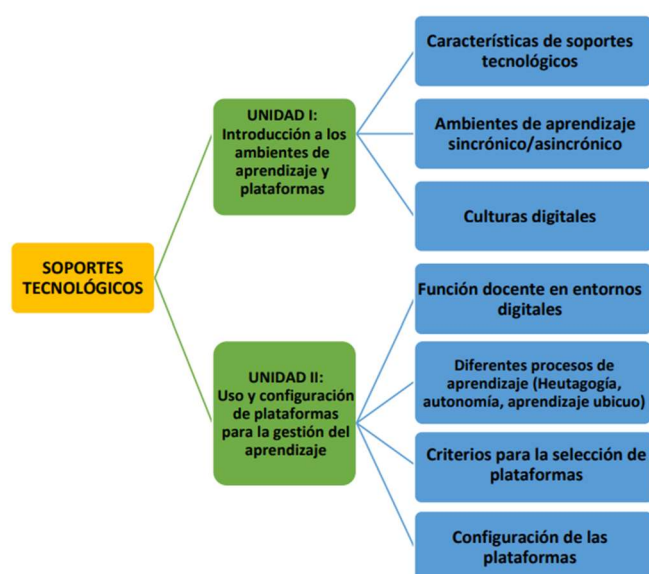
Figura 12. Organización de contenidos del curso *Software de apoyo a las matemáticas*

Unidad I. Software de simulación y graficación	Unidad II. Lenguaje de programación para la solución de situaciones problemáticas	Unidad III: Software para la atención diversificada en la enseñanza de las matemáticas
a) Geoplanos virtuales, regletas, tangram. b) Apps para graficación en dispositivos móviles. c) Calculadoras graficadoras	a) Programación por bloques b) Pensamiento computacional	a) Software para accesibilidad b) Software de gamificación

Tomado de: SEP 2022b, p. 12

Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas (SEP, 2022c) está estructurado en dos unidades las cuales se fundamentan principalmente en el análisis, experimentación, selección y apropiación de los ambientes de aprendizaje y plataformas para la gestión de aprendizajes, siendo en la unidad uno en donde el estudiantado tendrá la oportunidad de conocer mediante el análisis y la experimentación las características de dichos ambientes para lograr en la unidad dos, una selección de aquellos soportes tecnológicos que permitan aplicar los conocimientos de las herramientas, de tal manera que sea capaz de configurarla con la intención de administrar el aprendizaje (ver figura 13).

Figura 13. Organización del curso Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas



Tomada de: SEP 2022c, p. 10

Tecnologías y diseño didáctico (SEP, 2022d) contempla dos unidades de aprendizaje y tiene como propósito formativo que el estudiante normalista reflexione y fundamente la presencia de la tecnología como innovación en el diseño y evaluación de intervenciones didácticas apoyadas por herramientas tecnológicas, específicamente orientadas a la enseñanza de las matemáticas (ver figura 14).

Figura 14. Organización del curso Tecnologías y diseño didáctico



Tomado de: SEP 2022d, p. 13

Discusión final

La incorporación de las herramientas tecnológicas ha transformado y continúa modificando la forma de enseñar y aprender Matemáticas, aunque todavía es frecuente que los docentes de los diferentes niveles educativos enseñen matemáticas poniendo énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios en los que a veces los estudiantes dan solución mecánica. Debido a lo anterior, en los planes de estudio de la formación de profesores es fundamental la incorporación de cursos que incluyan el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pues proveen al estudiante de entornos interactivos que le dan oportunidad para explorar objetos matemáticos y validar sus hipótesis y soluciones, además de que podrán aplicar estas herramientas en la enseñanza de contenidos en sus jornadas de práctica o cuando ingresen al servicio docente.

En las últimas reformas a los planes de estudio de la formación de profesores de matemáticas se puede observar que ha ido aumentando la incorporación de

herramientas tecnológicas, y después de la revisión realizada a las mallas curriculares se puede concluir lo siguiente.

En la malla 1999 hay una limitada incorporación de tecnologías digitales pues sólo se observa un curso relacionado con este tipo de herramientas, y en los cursos para el estudio de la disciplina, en las orientaciones didácticas, no se sugiere el uso de este tipo de herramientas para la enseñanza o el aprendizaje de dicha disciplina.

En la malla curricular 2018, se presentan cursos que forman parte del trayecto optativo *Tecnología educativa* que están dedicados completamente al uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no obstante, no todos los estudiantes eligen estudiar este trayecto optativo, aunque como se comentó anteriormente, hay cursos obligatorios de la malla curricular que contemplan una unidad o un contenido relacionado con el uso de herramientas tecnológicas. Es importante decir que, en todos los cursos de la disciplina, en las orientaciones didácticas, se sugiere el uso de tecnologías para el aprendizaje de los contenidos.

En la malla curricular 2022 se puede observar una mayor presencia de cursos relacionados con el uso de la tecnología comparado con las mallas curriculares 1999 y 2018, en dicha malla se identifican 3 cursos nacionales que llevan todos los estudiantes de la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de cualquier Escuela Normal del país y 2 cursos estatales en el caso de la Norma Superior de México. En los cursos de la disciplina de esta malla curricular, al igual que en los de 2018, también se sugiere el uso de medios tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se propone que el docente diseñe ambientes de aprendizaje con el uso de un software y Apps en los que los estudiantes participen de manera activa y desarrollen habilidades matemáticas. Por último, en las mallas curriculares 2018 y 2022 aunque hay una mayor incorporación de herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en las escuelas normales no se tiene la suficiente infraestructura para que los docentes en formación puedan aprender contenidos matemáticos con el uso de las tecnologías.

Referencias

- Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245–274.
- Castellano, H. M. (2010). *Integración de la tecnología educativa en el aula. Enseñando con las TIC*. CENGAGE Learning.
- Centeno, R. (2021). Formación tecnológica y competencias digitales docentes. *Revista Tecnológica-Educativa Docentes 2.0*, 11(1), 174-182. <https://doi.org/10.37843/rted.v11i1.210>.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge.
- Saucedo, M., Jiménez, S., Salinas, H. A. y Muñoz, L. J. (2016). Uso de las TIC en los futuros docentes; caso Normal No. 2 de Nezahualcóyotl. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 3(5), 1-16.
- SEP. (1999a). *Plan de estudios 1999. Documentos Básicos de la Licenciatura en Educación Secundaria de las Escuelas Normales*.
- SEP. (1999b). *Plan de estudios 1999. Documentos Básicos de la Licenciatura en Educación Secundaria de las Escuelas Normales. Tecnología y didáctica de las matemáticas*. Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2018a). *Planes de estudios 2018. Documentos orientadores. Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria*. <https://www.cevie-dgesum.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120>
- SEP. (2018b). *Planes de estudios 2018. Documentos orientadores. Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. Innovación para la enseñanza de las matemáticas*. <https://www.cevie-dgesum.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120>.
- SEP. (2018c). *Planes de estudios 2018. Documentos orientadores. Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. Matemáticas en la ciencia y la tecnología*. <https://www.cevie-dgesum.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120>.
- SEP. (2018d). *Planes de estudios 2018. Documentos orientadores. Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. Modelación*. <https://www.cevie-dgesum.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120>.
- SEP. (2022a). *Planes de estudios 2022. Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. <https://dgesum.sep.gob.mx/planes2022>
- SEP (2022b). *Programa de Estudio de la Licenciatura en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. Primer semestre. Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas*. <https://dgesum.sep.gob.mx/planes2022/cursos49>.
- SEP (2022c). *Programa de Estudio de la Licenciatura en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. Segundo semestre. Software de apoyo a las matemáticas*. <https://dgesum.sep.gob.mx/planes2022/cursos49>.
- SEP (2022d). *Programa de Estudio de la Licenciatura en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. Tercer semestre. Tecnologías y diseño didáctico*. <https://dgesum.sep.gob.mx/planes2022/cursos49>.

CAPITULO IV

Rol del Cas y del papel-y-lápiz en la comprensión del concepto de integral impropia

Liliana Aurora Tabares Sánchez

Facultad De Ciencias Exactas UJED

Resumen

Se muestra la influencia del CAS (Computer Algebra System; de la Voyage 200) como parte de la Técnica en la comprensión del concepto de integral impropia visto desde los enfoques teóricos que sustentan nuestra investigación: Tarea-Técnica-Teoría (Artigue, 2002) y el de la comprensión en matemáticas (Sierpinska, 1994). Diseñamos actividades, las cuales debían ser resueltas en ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico por parejas de estudiantes de una licenciatura en negocios. Nuestros resultados evidencian que el uso del CAS, usado como artefacto e instrumento en la resolución de tareas, promovió la reflexión y la comprensión del concepto de integral impropia de los estudiantes en conjunto con ambiente de papel-y-lápiz, el cual fue fundamental en la motivación y posterior reflexión de los participantes.

Palabras clave: ambiente tecnológico, ambiente de papel-y-lápiz, CAS, actos de comprensión, enfoque epistémico de la técnica.

Introducción

La mecanización de procedimientos para resolver tareas introduce en muchos casos una confusión con relación a si los resultados obtenidos tienen algún sentido, práctico o teórico, o si los procedimientos usados son adecuados en cada caso. Esta situación suele presentarse al tratar de calcular una integral impropia. Cuando se propone calcular la integral de una función sobre $(-\infty, \infty)$ o en un intervalo finito que contenga alguna singularidad de la función, el cálculo de la integral no se puede realizar de la misma manera que en el caso de la integral definida. González-Martín y Camacho con base en los resultados que se obtienen al identificar dificultades, errores y obstáculos de los estudiantes en el aprendizaje de la integral impropia reconocen que los estudiantes aprenden parcialmente este concepto (integral impropia) sin darle significado y restringiéndose a cálculos algebraicos y a la aplicación de criterios de convergencia (2005).

Diversos trabajos de investigación han buscado la forma de mejorar el aprendizaje de la integral impropia con ayuda de las herramientas tecnológicas. Por ejemplo, Chii-Huei Yu (2013) sugiere la utilización del software Maple para el estudio de dos tipos de integrales impropias múltiples, usando la diferenciación respecto a

un parámetro y la regla de la diferencial de Leibniz. Otro ejemplo está en la propuesta de González-Martín y Camacho (2005b), quienes diseñaron una estrategia de ingeniería didáctica para los primeros cursos universitarios, con el fin de tratar de mejorar la comprensión de este concepto.

En el presente trabajo, el uso del CAS para la comprensión de la integral impropia es complementado con el trabajo en papel-y-lápiz. El fin es responder la pregunta: ¿cómo los procesos de comprensión de los estudiantes respecto de la integral impropia son motivados mediante la interacción alterna con CAS y el lápiz-y-papel?

Marco conceptual

Nuestro marco conceptual está constituido por ideas específicas provenientes de la de comprensión en matemáticas de Sierpinska (1994) y la T(area)-T(écnica)-T(eoría) de Artigue (2002). Dado que sus principios no se contraponen hemos visto la forma de usarlas de manera complementaria para fundamentar nuestra investigación. Usamos los conceptos de Tarea, Técnica y Teoría desde la visión de Artigue con el propósito principal de hacer explícito el uso de la Calculadora como parte de las técnicas de los estudiantes para solucionar las integrales y poder analizar su influencia en la comprensión del concepto. Los actos de comprensión definidos por Sierpinska los utilizamos para observar y evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes antes y después de usar la calculadora y así evidenciar la influencia del CAS en la comprensión del concepto.

Actos de comprensión (Sierpinska)

Para realizar la investigación consideramos necesario describir e interpretar la comprensión de los estudiantes en relación con el uso de la calculadora, por lo que recurrimos a la concepción de comprensión en matemáticas de Sierpinska (1990) pues ella propone una forma de observar cómo van tomando significado los objetos de estudio a través de los actos de comprensión que se manifiestan.

Sierpinska define la comprensión como el acto de adquirir significado del objeto de comprensión. A través de procesos particulares se va construyendo el significado del concepto que se estudia al buscar relaciones con las bases de

comprensión personales. Son los actos de comprensión los que manifiestan la adquisición de significados. Cada acto de comprensión lleva consigo un proceso mental que produce un modo de conocimiento del objeto.

Sierpinska clasifica los actos de comprensión de acuerdo con el modo de conocimiento que producen en cuatro categorías: Identificación, Discriminación, Generalización y Síntesis (1990, p. 29). Estas categorías son las que usamos en este estudio para describir el nivel de comprensión observado en los estudiantes y después de usar la calculadora y así evidenciar la influencia del CAS en la comprensión del concepto de integral impropia.

El acto de comprensión de Identificación es el acto, según Sierpinska, de percibir un objeto, que hasta el momento estaba en segundo plano, como imagen principal y hacerlo merecedor de interés y estudio. Reconocer objetos de estudio de entre un universo de objetos.

La Discriminación es el acto de diferenciar dos objetos evidenciando sus propiedades relevantes, destacar características específicas que hacen original al objeto observado.

En la Generalización el sujeto percibe que algunas condiciones del objeto que no son esenciales y se vuelve consciente de la posibilidad de extender el rango de aplicación.

La Síntesis es el acto de reconocer las relaciones entre hechos aislados; provoca que se agrupen en conscientemente las propiedades y relaciones de los objetos a significar.

Al observar los actos de comprensión podemos estimar y evidenciar el nivel de significado que ha adquirido determinado objeto de estudio.

Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T)

El enfoque de las T-T-T es una adaptación de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999) que fue realizada por Artigue (2002) cuyo principal objetivo es englobar el significado de Tecnología y Teoría en la

componente de Teoría y usar el término de Tecnología para referirse a los dispositivos digitales.

La noción de Tarea empleada en este enfoque teórico es más amplia que del lenguaje corriente: “se trata de una puesta en práctica particularmente simple del principio antropológico” (Chevallard, 1999, p. 222). Este principio antropológico es considerado porque la TAD sitúa la actividad matemática y la actividad del estudio de las matemáticas en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales.

En la Teoría se discuten la consistencia y efectividad de la Técnica, de esta manera, surgen propiedades y conceptos, incluso lenguajes específicos (Lagrange, 2005).

Artigue (2002) define la Técnica como el conjunto de trabajo rutinario y de razonamiento mediante el cual se resuelve cierta Tarea. La Técnica ayuda a distinguir y reorganizar las Tareas y en este sentido, juega un papel pragmático (Lagrange, 2005); por ejemplo, cómo identificar el conjunto de algoritmos para resolver un problema o bien juega un papel epistémico, pues “contribuye en la comprensión de los objetos matemáticos, particularmente, durante su elaboración y sirven como objeto de reflexión conceptual cuando se comparan con otras Técnicas y cuando se discute su consistencia” (Lagrange, 2003, p. 271).

En la T-T-T se considera que las técnicas y los conceptos no sólo son complementarios, sino que, en un ambiente de aprendizaje apropiado, las Técnicas y los Conceptos emergen de forma simultánea y se apoyan entre ellos para crecer (Kieran y Saldanha, 2008).

La comprensión de Teoría y de las Técnicas que los estudiantes desarrollan al trabajar con aparatos tecnológicos es estudiado por distintos investigadores apoyándose en el enfoque T-T-T, poniendo énfasis en el papel epistémico que juega la Técnica para la comprensión de objetos matemáticos, por ejemplo, Kieran y Drijvers en su estudio (2006) comprueban que las técnicas y la teoría co-emergen en los estudiantes cuando trabajan en ambientes CAS.

En esta investigación se observa el rol epistémico o pragmático de las Técnicas usadas por estudiantes universitarios al resolver Tareas, relacionadas con el concepto de integral impropia, en los ambientes tecnológico y de papel-y-lápiz. A través de los actos de comprensión que manifiestan los estudiantes en su resolución de las Tareas identificamos la influencia del CAS como parte de la Técnica.

Metodología

Los participantes del estudio son estudiantes de una carrera universitaria en la cual toman varias clases de matemáticas avanzadas. La selección de dichos participantes se realizó a través de una invitación, para cooperar con el proyecto, abierta a un grupo específico que nos señaló la profesora del plantel el cual calificaba como un buen grupo. Los estudiantes ya habían tomado un curso, en el semestre anterior al que se llevó a cabo la investigación, en el cual habían estudiado el concepto de integral impropia.

Los estudiantes resolvieron las actividades en parejas, con la intención de que al buscar llegar a un acuerdo en la respuesta que proponen, se generara una discusión en la que podríamos observar el sentido en el cual es dirigido el proceso mental que llevan a cabo –y se manifiestan más claramente los actos de comprensión.

Para resolver el total de actividades se hicieron en sesiones no continuas de tres o cuatro horas. Todas las sesiones fueron video grabadas y en cada una el investigador estuvo presente e intervenía solo para solicitar a los estudiantes que aclararan algún razonamiento o que ampliaran su explicación.

Las actividades tienen como objetivo que los estudiantes reconozcan las características específicas de la integral impropia sin que se mencione explícitamente que se trata de este tipo de integral, por ejemplo, identificar la integral impropia como un límite. Las tareas están dirigidas a resaltar las técnicas que los estudiantes adoptan para resolverlas e identificar si al resolverlas con la calculadora la técnica se integra desde su rol pragmático o epistémico.

La actividad se divide en distintas tareas, primero se les propone analizar funciones con ayuda de la gráfica, después se les pide calcular la integral en un

intervalo en el cual las funciones están bien definidas, a continuación, deben calcular la integral de las mismas funciones en intervalos que por su naturaleza son clasificadas como integrales impropias, todo esto se hace con papel y lápiz y posteriormente con ayuda de la calculadora para comparar con sus resultados previos. Los estudiantes deben además justificar su respuesta escribiendo si el resultado obtenido tiene sentido para ellos y si encuentran alguna diferencia entre su resultado y el de la calculadora decidir cuál es el correcto y justificar su decisión, o bien realizar las operaciones sintácticas pertinentes de modo que los resultados obtenidos coincidan.

A lo largo de la actividad se les pidió a los estudiantes resolver distintas tareas entre la cuales debían analizar la función $y = \frac{1}{x^2}$ y graficarla. La función no está definida para $x = 0$ por lo que al integrar en distintos intervalos se puede definir como integral propia o impropia. Dicha función, primero, se debe integrar sobre el intervalo $[1,3]$, en el cual está bien definida de manera que se puede considerar y operar según la definición usual de la integral definida. Posteriormente, se debe calcular la integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}$. La función no está definida en el punto $x = 0$ por lo que debe ser tratada como una integral impropia.

Análisis de datos y discusión de resultados

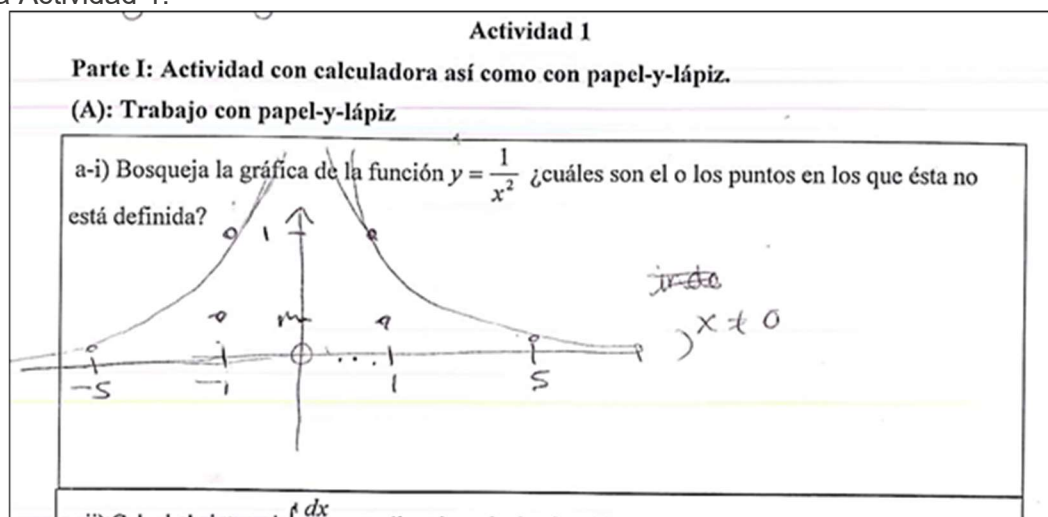
Para llevar a cabo el análisis de los datos usamos los actos de comprensión de Sierpinska y los enfoques Pragmático y Epistémico de la Técnica como categorías de análisis. A través de especificar si las técnicas usadas, al incorporar la calculadora, son tratadas desde el enfoque epistémico, consideramos que podemos identificar si su uso es significativo para incitar a la manifestación de actos de comprensión que indiquen que el concepto va tomando significado para los estudiantes.

Los estudiantes en general resolvieron las primeras tareas, que se refieren al bosquejo de las gráficas de las funciones y a calcular integrales bien definidas, con técnicas enfocada desde lo pragmático en ambos ambientes. Ellos recurrieron de forma “automática” a las representaciones gráficas y procedimientos algorítmicos

que conocían y manejan bien (dar valores a la variable x para obtener puntos en la gráfica, utilizar fórmulas para calcular la integral definida y sustituir y la calculadora la utilizaron solo para comprobar resultados). Incluso, las discusiones fueron escasas, uno de los dos estudiantes de un equipo tomó la iniciativa para utilizar los algoritmos conocidos mientras el otro se limitaba a aprobar las propuestas de su compañero.

Durante la resolución de la primera parte de la actividad, los actos de comprensión percibido fue la identificación y discriminación del objeto de estudio, por parte de los estudiantes, quienes no reflexionaron acerca de los resultados obtenidos ni de su significado. Por ejemplo, en la Figura 1 se muestra el bosquejo de la gráfica de la función $y = \frac{1}{x^2}$ que realizaron los estudiantes E1 y E2, en la cual uno de ellos dibujó un círculo en el punto $(0,0)$; al mismo tiempo que expresó “aquí es”. El punto que señalan en la gráfica $x = 0$ se hace merecedor de su interés, con esta acción se evidencia la identificación. Además, prolongaron la gráfica sobre el texto de las indicaciones de la actividad, señalando el crecimiento asintótico, con lo cual también se observa el acto de comprensión de identificación (de las características propias de la función que se les pidió graficar). La comparación de técnicas utilizadas en los dos ambientes sólo llevó a los estudiantes a buscar errores en los procesos algorítmicos ejecutados con papel-y-lápiz.

Figura 1. Bosquejo de la gráfica de la función dibujada por los estudiantes E1 y E2. Parte I de la Actividad 1.



Las tareas en esta primera parte de la actividad no representaron un reto para los estudiantes pues eran propuestas que ellos estaban acostumbrados a resolver lo que provocó que la confianza en sus métodos se afianzará y que posteriormente llevará a la reflexión en la solución de las integrales impropias.

Cuando los estudiantes E1 y E2 resolvieron la integral definida $y = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$, por ejemplo, los actos de comprensión de Identificación y Discriminación se evidenciaban como parte de la estrategia para explicar y darle sentido a los procedimientos utilizados y a los resultados expuestos.

Se considera que la instrucción de decidir si el resultado obtenido tenía sentido al compararlo con el área bajo la curva de la función, motivó a los estudiantes para que buscaran una estrategia que validara sus respuestas y se observó un pequeño avance de los estudiantes respecto a la utilización de las técnicas a partir del carácter epistémico en ambos ambientes (tecnológico y papel-y- lápiz). Los estudiantes buscaron semejanzas con polígonos regulares del área bajo la curva de la función con el propósito de comparar el resultado que obtuvieron al calcular la integral con el área del polígono, y decidir si el resultado de la integral tenía sentido o no. Incluso llegaron a observar otros aspectos en la gráfica de la función que no habían tomado en cuenta, como el hecho de que hay un comportamiento asintótico de la función en uno. Las líneas L1 a L4 muestran las transcripciones de la conversación que llevaron a cabo los estudiantes E1 y E2.

L1. E1: Por eso hay una asíntota aquí en el uno.

L2. E2: No veo tu asíntota.

L3. E1: Aquí está en uno y cuando es menor a cero, muere [señala la gráfica y mueve su dedo en forma descendente] ¿ok? Pero estamos hablando entre cero y cinco. Debe ser un tipo de cuadrado ¿no?

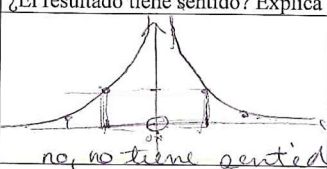
L4. E2: Sí, sí un caso.

Cuando las tareas incluyen integrales definidas en intervalos en los que se consideran impropias el trabajo de los estudiantes con calculadora fue utilizado con carácter epistémico pues cada vez que observaban el resultado mostrado en la pantalla de la calculadora reflexionaban sobre el sentido de éste. Los estudiantes

E1 y E2 comenzaron a dar muestras de actos de comprensión dirigidos al concepto de integral impropia después de comparar sus respuestas con los resultados que arrojó el CAS. Los estudiantes, al no detectar errores en sus procedimientos cuando resolvieron la tarea con lápiz-y-papel, decidieron concluir que el resultado obtenido no tenía sentido y abandonaron la tarea (en la Figura 2 bajo el bosquejo de la función se ve escrita la conclusión de los estudiantes). Posteriormente, la reflexión sobre ese resultado fue retomada por los estudiantes motivados por el resultado de la calculadora.

Figura 2: Conclusión de los estudiantes E1 y E2 al buscar sentido al resultado obtenido de

la integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Parte III Actividad 1.

Parte III. Actividad con papel-y-lápiz y calculadora.		
Trabajo con papel-y-lápiz		
Calcula las integrales y compara el resultado obtenido de la integral con el área bajo la curva de la gráfica de la función.		
Integral	Cálculo de la integral	Bosqueja de la gráfica de la función y compara el resultado obtenido de la integral con el área bajo la curva. ¿El resultado tiene sentido? Explica
$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$	$-\frac{1}{x} \Big _{-1}^1 = -(1+1) = -2$ $-\frac{1}{x} \Big _{-1}^1 = -(1+1) = -2$	 no, no tiene sentido

Cuando los estudiantes calcularon la integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ usando papel-y-lápiz obtuvieron como resultado -2 y el resultado desplegado por la calculadora fue el símbolo ∞ , lo cual significaba que la integral es divergente. Los estudiantes sostuvieron una discusión cuando el investigador los cuestionó sobre la manera de hacer coincidir los resultados obtenidos con la calculadora y los obtenidos con papel-y-lápiz. En seguida, se muestra la transcripción de un fragmento de la conversación. El estudiante E1 propuso, por primera vez, la posibilidad de interpretar [los resultados obtenidos tanto con el CAS como en papel-y-lápiz], por medio de límites, aunque no especificó si la función es integrable o bien, si la integral converge o diverge, condición fundamental en el concepto de integral impropia.

L5 E1: Con límites ¿no?, ..., es que estoy pensando en vectorial. [Se refiere a Cálculo vectorial.]

L6 E2: Sí, ya sé. Pero por ahí...

L7 I: ¿Por qué con límites? ¿Por qué se te ocurrió?

L8 E1: Porque te dice a qué se acerca. A ver ¿para qué sirve el límite? El límite sirve para ver “a qué se acerca” [...] [Se refiere a los procesos de límite de sucesiones o de funciones, cuando una variable se acerca a un valor fijo (el límite); si es que los límites existen, entonces tiene sentido su expresión “a qué se acerca”.]

L9 E2: El valor de una función evaluada con una x que tiende a algo.

Con esa propuesta, el estudiante E1 mostró actos de comprensión que se clasifican como generalización al proponer una nueva posibilidad de interpretación de los resultados obtenidos en ambos ambientes (tecnológico y tradicional). El estudiante E2 aceptó la propuesta y buscó la manera de interpretar la integral por medio de límites, pero en ese momento no pudo llegar a una conclusión aceptable.

Después de la discusión anterior el estudiante E2 trató de interpretar, por medio de límites, el resultado obtenido al calcular la integral. El estudiante E1 propuso “partir” la integral y resolverla como la suma de dos integrales (se puede observar en el extracto de la conversación de la línea L10 a la L20). Ambas propuestas (partir o separar la integral en la suma de dos integrales y la de operar la integral mediante límite) son condiciones necesarias para resolver ese tipo de integral impropia que se propuso, según el conocimiento institucionalizado del concepto de integral impropia de tercera clase.

L10 E1: ¿Qué pasa si la partimos? [No se sabe a qué se refiere el estudiante con esta expresión; es probable que se trate de analizar la gráfica de la función en dos partes.]

L11 E2: Cuando x tiende a cero ¿cuánto vale esta cosa? Sí, con un límite, aquí hay un hueco.

L12 E1: [Mientras su compañero comienza a establecer el límite para determinarlo] Un límite dice cuánto vale no el área.

L13 E2: Pues sí nos dice cuánto vale ahí la función en el hueco ese.

L14 E1: Sí, pero...

L15 E2: ¿Qué quiere decir que haya evaluado hacia el infinito?

L16 E1: Eso es infinito.

L17 E2: Sí, ya sé.

L18 E1: Ya sé que tienes que derivar y derivar, pero es infinito. [Al parecer, el estudiante está pensando que, una vez obtenida la derivada de la función, no puede evaluar en el infinito, pues éste no es un número real.]

L19 E2: ¿Qué nos dice entonces? Evaluado aquí tiende a infinito.

L20 E1: Que tiende a infinito. Que crece y crece y crece y entre más se acerca a cero más crece.

Los estudiantes concluyeron su discusión después de hacer los cálculos algorítmicos. Esos cálculos les permitieron afirmar que la manera mediante la cual ellos debían integrar era “partiendo” la integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ para que sus procedimientos con papel-y-lápiz los llevaran a obtener el resultado consistente con el obtenido con la calculadora. Los estudiantes comenzaron a considerar irrelevantes algunos supuestos y a descubrir nuevas posibilidades de interpretación de los conceptos que utilizaban para validar sus respuestas. Los estudiantes generalizaron respecto a conceptos involucrados en el de integral impropia sin llegar a hacerse conscientes de la posibilidad de extender el rango de aplicación hacia este concepto de integral impropia.

Conclusiones

Durante la resolución de las Actividades, por los estudiantes, se identificaron en distintos momentos actos de comprensión motivados por la interacción llevada a cabo con papel-y-lápiz y tecnología. Se observó cómo esos dos ambientes se utilizaron como apoyo uno del otro para la reflexión que llevó a los estudiantes a la adquisición de significados de conceptos relacionados con los de integral impropia.

En general, se percibe que las Técnicas se usan con enfoque epistémico cuando los estudiantes tratan de validar sus respuestas y los procedimientos que los llevan a ellas. Las Actividades motivaron, de manera relevante, la búsqueda de relaciones entre las bases de comprensión y el objeto de comprensión en la

construcción de significados (surgimiento de teoría). Las búsquedas de esas relaciones, por parte de los estudiantes, se pueden identificar con aquellas preguntas en las que se les pide a los estudiantes decidir si sus resultados tienen sentido o no. La comprensión (de forma parcial y no total o completa) del concepto de integral impropia, por parte de los estudiantes, se dio a través de la comparación y validación de técnicas cuando éstas fueron usadas con carácter epistémico.

Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245-274.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chii-Huei, Y. (2013). A study on multiple improper integrals using maple. *International Journal of Physics and Mathematical Sciences* pp. 55-60 <http://www.cibtech.org/jpms.htm>
- González-Martín, A. y Camacho, M. (2005a). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las ciencias. Revista de Investigación y experiencias didácticas*, 23(1), 81–96.
- González-Martín, A. y Camacho, M. (2005b). La integral impropia. Una ingeniería didáctica para su enseñanza. In F. Hitt y C. Cortés (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza* (pp. 265-283). Morevallado Editores.
- Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 205-263.
- Kieran, C. & Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the codevelopment of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on Technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2 Cases and perspectives* 394-414. Information Age Publishing.
- Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lagrange, J-B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Rutheven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135).: Springer.
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning in mathematics*, 10, 3, 24-36.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. The Flamers Press.hit

CAPITULO V

Enseñanza y comprensión de estocásticos con estudiantes de bachillerato desde el enfoque de la interdisciplinariedad

Saúl Elizarraras Baena

Escuela Normal Superior de México
Ana María Ojeda Salazar

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Resumen

Este estudio, cualitativo (Eisner, 1998; Vasilachis, 2006) forma parte de un proyecto de investigación educativa más amplio sobre la enseñanza, medios y comprensión de estocásticos en bachillerato general. El objetivo general aquí planteado es caracterizar la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) en 200 estudiantes de tercer semestre de bachillerato general cuando la enseñanza se instrumenta mediante un proyecto interdisciplinario, de contexto comunitario. Para ello, los estudiantes aplicaron una encuesta relacionada con las acciones que ameritan sanción según el Bando municipal del H. Ayuntamiento de Chicoloapan del Estado de México. Los resultados obtenidos establecieron que los problemas del uso irracional del agua y tirar basura en la vía pública fueron los que presentaron las mayores frecuencias de solución apremiante. Para el tratamiento y significación de los datos recopilados en el aula de matemáticas, resultó que los estudiantes dieron sentido a las ideas fundamentales de estocásticos de muestra y de ley de los grandes números, al poner en juego las medidas de tendencia central de moda, media y mediana, y las de dispersión como desviación media, varianza y desviación estándar. Con base en esta información, los estudiantes contextualizaron y sustentaron sus propuestas de solución a los problemas identificados, articulándolas al poner en práctica contenidos estudiados en otras Unidades de Aprendizaje Curricular, como “Hoja de Cálculo”, “Cultura digital” y “Ecosistemas, interacción, energía y dinámica”, y elaboraron infografías, diapositivas y videos para promover la concientización de la población de la necesidad de cuidar el medio ambiente en beneficio de la comunidad.

Palabras clave: Enseñanza, comprensión, probabilidad, estadística, interdisciplinariedad.

Introducción

El Marco Curricular Común para la Educación Media Superior (DOF, 2023) establece la necesidad de trabajar en forma interdisciplinaria entre los recursos socio cognitivos y las áreas de conocimiento; para ello, se plantea el Proyecto Aula, Escuela y Comunidad (PAEC) que se enfoca en el diseño y desarrollo de un proyecto que implica la participación de docentes, estudiantes, directivos y padres de familia.

En nuestro caso, en un primer momento, el proyecto desarrollado se enfocó en caracterizar la cultura cívica que se practica en la Comunidad de Chicoloapan, municipio localizado al oriente del Estado de México. Para ello, 200 estudiantes de

la Escuela Preparatoria Oficial 143 (EPO 143), del turno matutino, aplicaron una encuesta vía WhatsApp a sus familiares, vecinos o amigos de su comunidad, relativa a la temática de las acciones de la ciudadanía que se sancionan y se estipulan en el Bando Municipal respectivo.

Los resultados de la encuesta se registraron en formato de hoja de cálculo, compartido en una plataforma de acceso libre por los representantes de cada uno de los cinco grupos de tercer semestre que forman parte de la EPO 143. Derivado de este concentrado, las y los estudiantes identificaron que tirar basura en la vía pública y hacer uso irracional del agua fueron los problemas que más afectan a su comunidad.

Las Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) relacionadas con este Proyecto interdisciplinario, a saber: “Pensamiento Matemático 1”, “Lengua y Comunicación”, “Hoja de Cálculo” y “Ecosistemas, Interacciones, Energía y Dinámica”.

El objetivo del Proyecto fue: Caracterizar la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de estudiantes de tercer semestre de bachillerato general cuando la enseñanza se articula mediante un proyecto interdisciplinario.

Lo anterior se justificó en términos de que es evidente que, en las últimas dos décadas, los habitantes de Chicoloapan han padecido los estragos del cambio social y del medio ambiente, debido al crecimiento de la población y a la consecuente construcción masiva de unidades habitacionales o al surgimiento de colonias populares, en lugares que antes se destinaban a la agricultura y a la ganadería.

Desarrollo

En este apartado se describen los antecedentes y referentes teóricos que fundamentaron el desarrollo de esta investigación; enseguida, los aspectos de método y organización para, posteriormente, analizar los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario que se enfocó en contenidos de Estadística y Probabilidad implícitos en el desarrollo del proyecto interdisciplinario.

Antecedentes

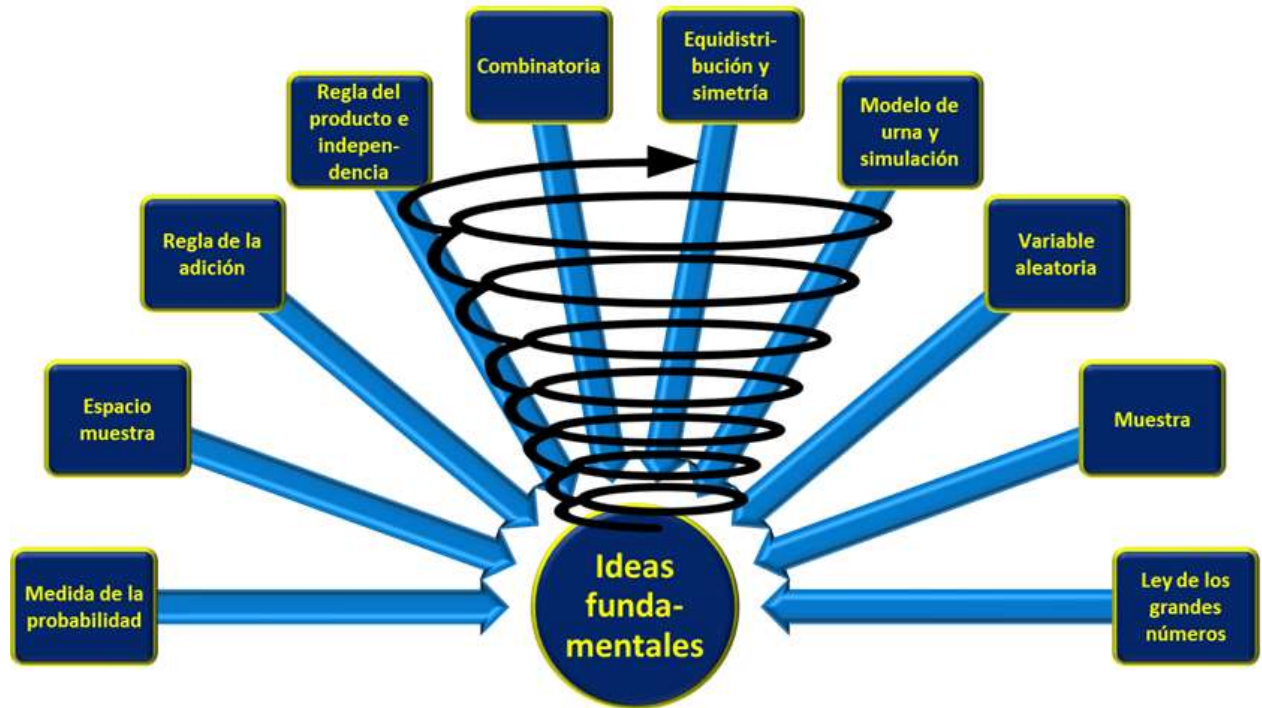
Bakker (2003) señala la pertinencia de utilizar los valores promedio para el diseño instructivo en las aulas de enseñanza media, desde la perspectiva del desarrollo histórico y del desarrollo individual de la comprensión estadística de los estudiantes de ese nivel educativo. De manera específica, refiere que la estimación de la media con el sustento de representaciones de barras es una sencilla herramienta a considerar como punto de partida para un curso de estadística. Luego, en 2007 el autor analizó un ejemplo de la enseñanza de la estadística en el que el razonamiento diagramático crea oportunidades para la abstracción hipostática, es decir, para tomar un predicado como un nuevo objeto que puede tener predicados por sí mismo y así, mediante el razonamiento, identificar los principales procesos que intervienen en el aprendizaje sobre conceptos estadísticos.

Referentes teóricos

Uno de los fundamentos teóricos de esta investigación es la propuesta epistemológica de Heitele (1975) de diez ideas fundamentales de estocásticos, a las considerarse desde la perspectiva de la espiral curricular de Jerome Bruner (1960) (ver Figura 1), de manera que la enseñanza puede realizarse desde la educación preescolar hasta la superior, según el nivel cognitivo de las personas.

Figura 1

Ideas fundamentales de estocásticos.



Fuente: Elaboración propia.

Un segundo fundamento teórico considerado es el cognitivo. Frawley (1999) refiere que el externalismo y el internalismo tratan sobre hechos compatibles y deben trabajar entre sí para que la ciencia cognitiva pueda obtener un panorama más amplio del pensamiento humano. Para ello, propone tres etapas de la subjetividad, a saber: procesamiento no consciente (funciona como un reflejo de la experiencia personal), conciencia (toma mínima de conciencia de los modelos simbólicos) y metaconsciencia (toma de conciencia del yo y la organización deliberada de la experiencia).

El tercer fundamento teórico que se incorpora en esta investigación es el social. Al respecto, Steinbring (2005) puntualiza que las intuiciones probabilísticas no son innatas ni a priori y para lograr la comprensión del estudiante de los conceptos sobre estocásticos, se requiere que el docente seleccione las situaciones apropiadas. Para explicar el fenómeno de la construcción del conocimiento matemático derivada de la interacción en el aula, propone analizarla mediante el

triángulo epistemológico, cuyos vértices, el concepto, el objeto y el signo, se interrelacionan de forma imprescindible en la construcción del concepto.

Organización y método

Como parte de un proyecto más amplio, en este avance de investigación, cualitativa (Eisner, 1998; Vasilachis, 2006), se informa sobre las dificultades que surgen cuando la enseñanza a estudiantes de tercer semestre de bachillerato general se articula mediante un proyecto interdisciplinario.

El método instrumentado es la observación participante. Se registraron en bitácora los datos relevantes para la investigación. El instrumento fue un cuestionario. Para profundizar en la comprensión de los estudiantes de ideas fundamentales de estocásticos implicadas se aplicaron dos entrevistas individuales semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1998).

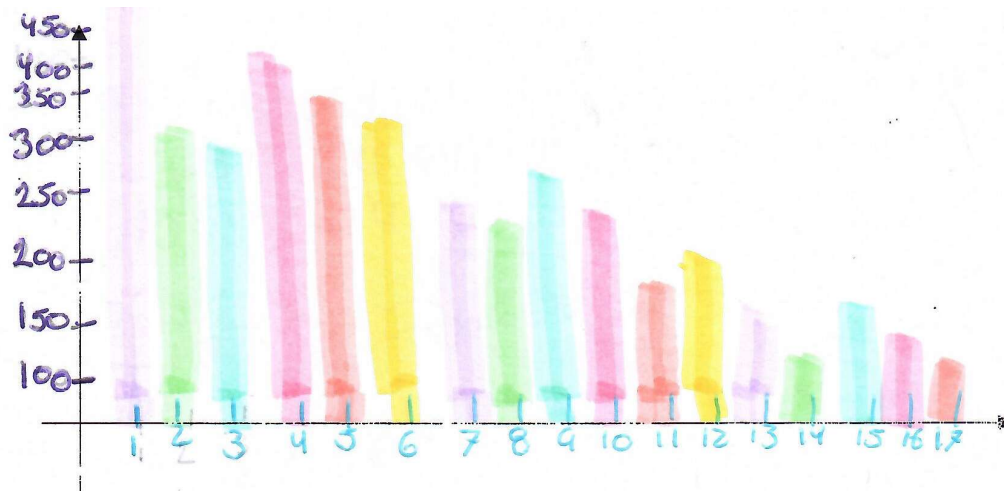
Con la célula de análisis (Ojeda, 2006), en las respuestas y el desempeño de los estudiantes se identificaron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos requeridos, registros semióticos y términos utilizados referidos a lo posible.

Resultados con el cuestionario

La petición de trazar la distribución de frecuencias de los 10 problemas más frecuentes ordenados de mayor a menor, las incorrecciones comunes fueron la falta de uniformidad en la escala de los valores numéricos en el eje de las ordenadas y de observancia del orden (véase la Figura 2). Este tipo de respuesta se ubica en la frontera entre el procesamiento no consciente y la conciencia. Además, la ausencia de denominación de cada eje indica irrelevancia de la función cognitiva de categorizar.

Figura 2.

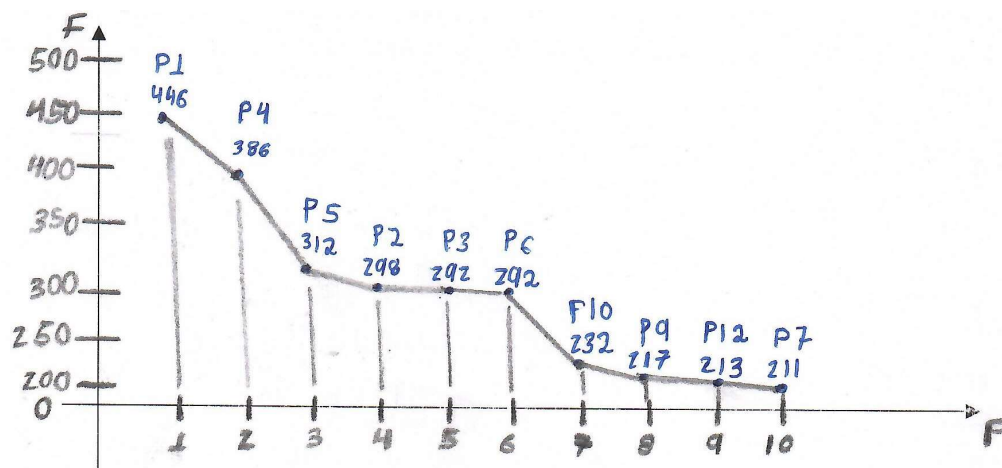
Ejemplo de gráfica de distribución de frecuencias sin orden ni etiqueta en los ejes.



Al contrario, la Figura 3 muestra el polígono de frecuencias elaborado por un estudiante que, con excepción de regularidad de la escala de frecuencias, sí atendió las peticiones hechas. En este caso, sí ordenó de mayor a menor cada uno de los diez problemas, pero tampoco distribuye de manera equitativa los valores numéricos del eje de las ordenadas. Su desempeño se puede ubicar en la conciencia.

Figura 3.

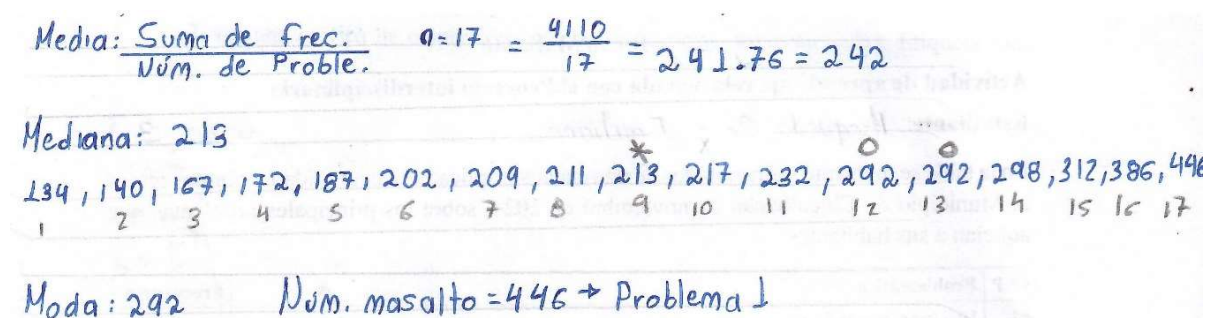
Ejemplo de gráfica que corresponde a un polígono de frecuencias que no distribuye de manera equitativa los valores numéricos del eje de las ordenadas.



La pregunta 2 del cuestionario solicitó las medidas de tendencia central de las acciones sancionadas en el Bando municipal de Chicoloapan. La Figura 4 muestra los procedimientos y respuestas correctas proporcionadas por un estudiante, a quien se le ubica en la metaconciencia.

Figura 4.

Ejemplo de respuesta sobre el cálculo de las medidas de tendencia central.



La Figura 5 muestra un ejemplo de respuesta correcta a la pregunta 3, que solicitó calcular las medidas de dispersión. Aunque podría ubicársele en la frontera entre la conciencia y la metaconciencia, como sólo se organizaron en una tabla los valores absolutos de las diferencias entre las frecuencias menos la media aritmética, queda ubicada en la frontera del procesamiento no consciente y la conciencia.

Figura 5.

Ejemplo de respuesta correcta para el cálculo de las medidas de dispersión.

Rango: Valor Max - Valor Min. $\rightarrow 446 - 134 = 312$

$$\text{Desviación Media: } \frac{\sum |x' - \bar{x}|}{n}$$

x' = cada frec. $\bar{x}$ = Media (241.76)
 n = Núm. total de Frec's. (17)

$$\text{Varianza: } \frac{\sum (x' - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{Total: } \frac{1061232.8}{17} = \text{Aprox } 6190.28$$

Desviación Estandar:

$$D.E. = \sqrt{\text{Varianza}} \rightarrow \sqrt{6190.28} = 78.66$$

P	F	Result.
1	446 - 241.76	204.24
2	298 - 241.76	56.24
3	292 - 241.76	50.24
4	386 - 241.76	144.24
5	312 - 241.76	70.24
6	292 - 241.76	50.24
7	211 - 241.76	30.76
8	209 - 241.76	32.76
9	217 - 241.76	24.76
10	232 - 241.76	9.76
11	172 - 241.76	69.76
12	213 - 241.76	28.76
13	167 - 241.76	74.76
14	140 - 241.76	101.76
15	202 - 241.76	39.76
16	187 - 241.76	54.76
17	134 - 241.76	107.76

Cabe señalar que en la respuesta que muestra la Figura 5 también se omiten el índice y el subíndice en el símbolo sigma, que representa la sumatoria de todos los valores, lo que indica una desconexión entre signo, concepto y objeto en el triángulo epistemológico (Steinbring, 2005).

La Figura 6 muestra el cálculo incorrecto de la desviación media por un estudiante, quien al sumar todos los valores absolutos de las diferencias de los valores de las frecuencias menos la media aritmética obtiene esta última. Luego, resta la desviación media, 14.22, a todos los valores de las frecuencias obtenidas, cuyo valor obtiene al dividir la media aritmética entre el número de problemas considerados en la encuesta.

También es notorio su descuido en la ubicación del signo igual, además de que al usar la calculadora para determinar la varianza descuida los componentes del concepto. Esto lo ubica en la etapa del procesamiento no consciente, ya que el signo se mantiene desconectado del objeto y del concepto (Steinbring, 2005).

Figura 6.

Ejemplo de respuesta sobre el cálculo incorrecto de la desviación media.

1º Rango : Valor Máximo - Valor Mínimo = $446 - 134 = 312$

2º DM = $\frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{241.76}{17} = 14.22$

~~$|134 - 14.2| + |140 - 14.2| + |162 - 14.2| + |172 - 14.2| + |187 - 14.2| + |202 - 14.2| + |202 - 14.2|$~~
 ~~$+ |211 - 14.2| + |213 - 14.2| + |217 - 14.2| + |232 - 14.2| + |292 - 14.2| + |292 - 14.2| + |298 - 14.2|$~~
 ~~$+ |312 - 14.2| + |386 - 14.2| + |446 - 14.2|$~~

$117.8 + 125.8 + 152.8 + 157.8 + 172.8 + 187.8 + 194.8 + 196.8 + 198.8 + 14.8$
 $217.8 + 277.8 + 277.8 + 283.8 + 292.8 + 371.8 + 431.8 = 3,866.6 //$

$\frac{3,866.6}{17} = 227.44 //$

Ahora bien, cuando el estudiante calcula la varianza, utiliza los valores obtenidos de las diferencias de los valores absolutos y los eleva al cuadrado, lo cual es erróneo porque la media aritmética no se corresponde con el valor obtenido en las medidas de tendencia central (ver la Figura 7). Este tipo de respuesta también se puede ubicar en la etapa del procesamiento no consciente, pues evidencia una desconexión entre el objeto, el signo y el concepto, como lo plantea Steinbring (2005).

Figura 7.

Ejemplo de respuesta incorrecta sobre la varianza y la desviación estándar.

3º Varianza

$\text{Prob} - \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$

$\bar{x} = 241.76$

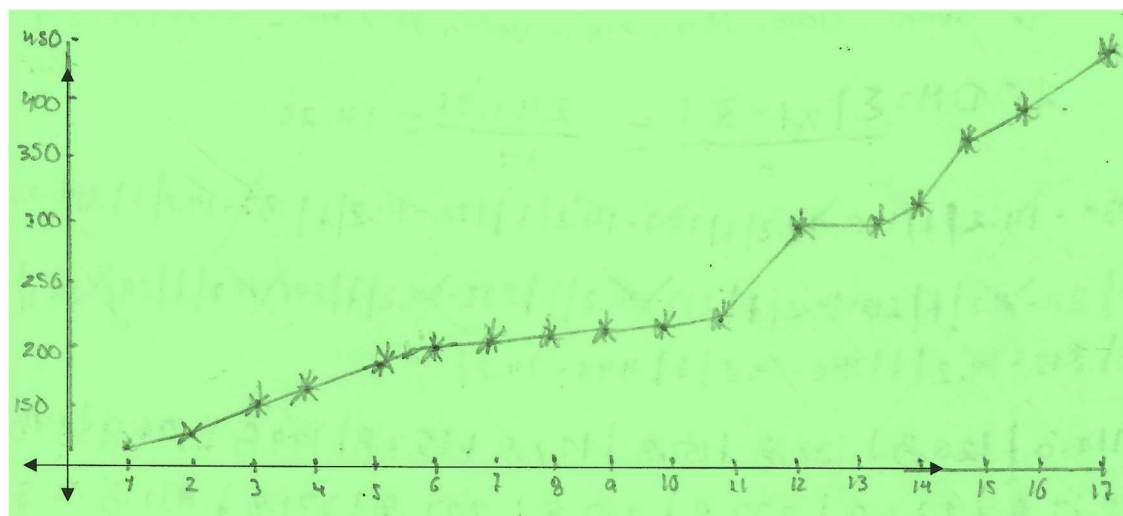
$\sigma^2 = 11,612.2176 + 10,355.0976 + 5,889.0576 + 4,866.4576 + 2,998.6576 + 158.8576 +$
 $7,073.2176 + 946.1776 + 827.1376 + 613.0576 + 95.2576 + 2,524.0576 +$
 $2,524.0576 + 3,162.9376 + 4,933.6576 + 20,803.1776 + 41,713.9776$
 $= \frac{114,799.0592}{17} = \frac{6,752.885895294117647}{17} \approx 397.22857854671$
 $28028 //$

4º $\sigma = \sqrt{397.2285785467128028} = 19.93 //$

La Figura 8 muestra un ejemplo de gráfica de dispersión elaborada por un estudiante. Se puede identificar que no se denominan los ejes ni se localizan la desviación media ni la estándar. Este tipo de respuesta se puede ubicar en la frontera entre el procesamiento no consciente y la conciencia. En términos del triángulo epistemológico, no hay una interrelación entre el objeto, el concepto y el signo.

Figura 8.

Ejemplo de gráfico de dispersión incompleto.



La Figura 9 muestra un ejemplo de interpretaciones de un estudiante respecto a los tres problemas más frecuentes (tirar basura en la vía pública, desatención a los animales, desperdicio del agua) que afectan a la comunidad, basándose en los valores obtenidos de la media aritmética.

Figura 9.

Ejemplos de interpretaciones sobre los tres problemas más frecuentes.

Problemáticas Mas frecuentes:	1. 446	4.386	5.312
	Votos	Votos	Votos
P1. 446			
P4. 386			
P5. 312			

P1. 446 ; Es significativamente mayor a la media general $\Rightarrow \bar{X} = 241.76$ con una diferencia de 204.24 estando el Problema muy por encima del Promedio de Problemas Reportados

P4. 386 $\rightarrow$ Media por encima $386 - 241.76 = 144.24$ siguesiendo una desviación considerable hacia los valores altos

P5. 312 $\rightarrow 312 - 241.76 = 70.24$ resultados considerables al estandar

Resalta una preocupación alarmante por parte del sector de la población ante dificultades de desechos solidos y liquidos, ademas de una considerable desatención al cuidado de los animales en Chicoloapan.

Resultados con la entrevista semiestructurada

Entrevistamos en formato semiestructurado individual a tres estudiantes voluntarios tres semanas después de la conclusión del proyecto. En las transcripciones que presentamos de la entrevista, E_n representa al o a la estudiante entrevistado(a) e I al entrevistador.

Resultó que el estudiante (E_1) reconoció que el problema del agua es el que tenía mayor probabilidad de ser reportado por los habitantes de su comunidad por haber sido el que más eligieron las personas encuestadas. Este tipo de respuesta revela condiciones favorables al reconocimiento de las ideas de Ley de los grandes números y de muestra, por lo que se le puede ubicar en la etapa de la conciencia, si bien no de manera formal:

I: ¿Cuál es el problema con mayor probabilidad de que sea informado por un habitante de la comunidad de Chicoloapan que sea seleccionado al azar para que conteste la encuesta?

E_1 : El problema del agua fue el más seleccionado por los habitantes de Chicoloapan, ya que fue un desperdicio de mucha agua, ya sea por lavar autos, motos, casas, patios, entre otras cosas.

I: En caso de que se le pregunte nuevamente a otra persona sobre el problema que más aqueja a la comunidad, ¿consideras que el agua nuevamente lo puedan seleccionar?

E₁: Lo más probable es que sí, pero la segunda más probable que también puedan seleccionar ese es tirar basura en la vía pública.

Sin embargo, cuando se le preguntó cuál sería el problema que se elegiría como menos probable, contestó que el de consumir bebidas alcohólicas en la vía pública, lo cual fue incorrecto, pues este problema fue el quinto en el orden de importancia, según las respuestas de las personas encuestadas. Esta última respuesta pudo deberse a que E₁ haya enmarcado el problema en una situación que le era familiar (Frawley, 1999), es decir, que fuera frecuente en el lugar donde vivía, aunque no se correspondiera con los resultados de la encuesta.

I: ¿Cuál es el problema con menor probabilidad del que se informe por un habitante de la comunidad de Chicoloapan que sea seleccionado al azar para que conteste a la encuesta?

E₁: El tercer problema sería uno que yo considero.

I: No, el menor.

E₁: Bueno, el menor que es uno de los que yo considero más importante, pero otras personas no, es tomar bebidas alcohólicas en la vía pública.

I: ¿Cuál consideras que es el problema más apremiante, es decir, que más urge que se le dé solución?

E₁: Probablemente, sería el problema de tomar bebidas alcohólicas en la vía pública por que mayormente los policías en la patrulla están monitoreando lo que es las calles, muchas veces los he visto.

También se le preguntó sobre las acciones que se debían llevar a cabo en la comunidad para que se pudiera aminorar el impacto negativo del problema de la basura, a lo que contestó que era necesario fomentar la conciencia de ello entre las personas:

E₁: Una comunicación estable entre... ahora sí que sería entre la comunidad, o fomentar lo que es todos estos tipos de problemas, ya sea el uso racional del agua o el uso irracional de tirar basura.

Otra cuestión de la que se preguntó se refirió a las UAC que se relacionaron con el proyecto interdisciplinario. Las respuestas dieron cuenta de las conexiones implicadas.

E₁: Sería la UAC de literatura, ciencias sociales, taller de ciencias, lengua y comunicación, cultura digital y hoja de cálculo, por [las] gráficas.

Contextualización de los conceptos

El objetivo perseguido con el proyecto interdisciplinario desarrollado se logró al contextualizar los conceptos que implicó de las distintas UAC, mediante el ejercicio de comunicar a la comunidad, con videos creados por los estudiantes, los resultados de sus estudios para la concientización de la necesidad de contribuir a la solución de sus problemas apremiantes.

A modo de conclusiones

El proyecto interdisciplinario del que reportamos aquí se desarrolló un año después de que los estudiantes cursaron la UAC de Pensamiento Matemático 1, que incluye el estudio de contenidos de Probabilidad y Estadística. De manera particular, en las tres entrevistas semiestructuradas realizadas, se revelaron algunas dificultades de comprensión de las ideas fundamentales de medida de probabilidad, variable estocástica, muestra y ley de los grandes números. Esto deja entrever que hubo circunstancias que no favorecieron la comprensión de los estudiantes y que pueden deberse a la enseñanza y/o a los responsables de las políticas públicas en educación.

No obstante, en general, la elaboración de infografías, diapositivas y videos para promover la concientización de la población sobre el cuidado del medio ambiente en beneficio de la comunidad contribuyó a que los estudiantes dieran sentido a los conceptos de estadística implicados, tales como: moda, media mediana, desviación media, varianza y desviación estándar. Además, el recurso a los contenidos de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, como “Hoja de Cálculo” o “Ecosistemas, Interacción, Energía y Dinámica”, contribuyó a que los estudiantes lograran contextualizar la red de conceptos diversos por su aplicación.

Este acercamiento a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos mediante el trabajo interdisciplinario dan la pauta para continuar con otros proyectos

que incidan en el establecimiento de los puntos de encuentro con otras disciplinas y con ello, puedan dar sentido a los elementos del triángulo epistemológico, a saber: concepto, objeto y signo.

Referencias

- Bakker, A. (2003). The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statistics Education*. 11(1), 1-18. <https://doi.org/10.1080/10691898.2003.11910694>
- Bakker, A. (2007). Diagrammatic reasoning and hypostatic abstraction in statistics education. *Semiótica*. 164(1), 9–29. <https://doi.org/10.1515/SEM.2007.017>
- Bruner, J. (1960). *The process of education*. Harvard University Press.
- DOF (2023). *Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común para la Educación Media Superior*. Secretaría de Gobernación. <https://bit.ly/481DUVh>
- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós.
- Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la Ciencia cognitiva*. Paidós.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6, 187-205.
- Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). Santillana-Cinvestav.
- Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction—an epistemological perspective*. Springer.
- Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Gedisa.
- Zazkis, R. & Hazzan, O. (1998). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.